О квантовании электромагнитного поля.
II. Неоднозначность выбора лагранжиана.

Д. А. Арбатский*

Март 2002 г.

Аннотация

Показано, что добавление к лагранжиану дивергенции некоторой функции не меняет симплектической структуры на инвариантном фазовом пространстве.

Как известно, к одной и той же динамике могут приводить различные выборы лагранжиана. Простейшей подстановкой такого рода является линейная замена:

$$L \longrightarrow L' = \alpha L \ .$$

Поскольку в данном цикле статей мы изучаем вопросы квантования и нормируем действие на постоянную Планка, $\hbar = 1$, то указанный произвол в нашем рассмотрении отсутствует.

Есть однако другой существенный произвол, заключающийся в добавлении к лагранжиану полной дивергенции[1]:

$$L \longrightarrow L' = L + \partial_\mu F_\mu \ , \tag{1}$$

где F_μ — некоторая векторная функция от координаты x и полевых переменных $\varphi_i(x)$.

В общем случае лагранжиан может содержать производные от поля по координатам выше первого порядка. Мы будем здесь иметь в виду такую возможность и будем считать, что функция F_μ также может зависеть от производных поля по координатам.

Поскольку подстановка (1) не меняет динамики, она оставляет инвариантное фазовое пространство Z неизменным. Сейчас мы покажем, что при этом также остаётся неизменной и симплектическая структура на Z . Это фактически приводит к тому, что весь инвариантный гамильтонов формализм к такой добавке нечувствителен. А поскольку квантование осуществляется на основе инвариантного гамильтонова формализма, то отсюда последует, что и конструкция квантованного поля при подстановке (1) не меняется.

Доказать неизменность симплектической структуры, исходя из формулы для симплектического тока, представляется затруднительным. В связи с этим мы напомним здесь, как определяется симплектическая структура непосредственно в вариационных терминах [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Рассмотрим действие в произвольной области Ω :

$$S = \int\limits_\Omega d^4x \, L(x, \varphi_i, \partial_\mu \varphi_i, \ldots, \partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_k} \varphi_i) \ . \tag{2}$$

Его вариация, если область не меняется, равна:

$$\delta S = \int\limits_\Omega d^4x \, \left(\frac{\delta L}{\delta \varphi_i} \, \delta\varphi_i + \partial_\mu j_\mu \right) \ , \tag{3}$$

Здесь

$$j_\mu = \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu \varphi_i)} \, \delta\varphi_i + \ldots + \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu \partial_{\mu_2} \ldots \partial_{\mu_k} \varphi_i)} \, \partial_{\mu_2} \ldots \partial_{\mu_k} \delta\varphi_i \ .$$

*http://daarb.narod.ru/ , http://wave.front.ru/

[1] В принципе, существуют и другие, более сложные подстановки, которые ввиду своей сложности практической роли обычно не играют.

Вариационная производная при этом понимается как

$$\frac{\delta}{\delta a} = \frac{\partial}{\partial a} - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu a)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu a)} - \ldots \ .$$

Действие (2) может рассматриваться как функционал на множестве функций φ_i . Используя тождество $\delta^2 = 0$, получаем:

$$\int\limits_\Omega d^4x \left(\delta \left(\frac{\delta L}{\delta \varphi_i} \, \delta\varphi_i \right) + \partial_\mu \delta j_\mu \right) = 0 \ .$$

Если здесь рассматривать варьирование только функций φ_i , для которых действие стационарно, то первый член в последнем уравнении зануляется. Отсюда получаем, что симплектическая структура, задаваемая на Z как

$$\omega = \int\limits_\Sigma d\sigma_\mu \, \delta j_\mu(x) \ ,$$

не зависит от выбора пространственно-подобной поверхности Σ (предполагается, что Σ ведёт себя достаточно хорошо на бесконечности).

Посмотрим теперь, как изменятся приведённые уравнения при подстановке (1).

Вариация нового действия S' может быть записана аналогично формуле (3):

$$\delta S' = \int\limits_\Omega d^4x \left(\frac{\delta L'}{\delta \varphi_i} \, \delta\varphi_i + \partial_\mu j'_\mu \right) = \int\limits_\Omega d^4x \left(\frac{\delta L}{\delta \varphi_i} \, \delta\varphi_i + \frac{\delta(\partial_\mu F_\mu)}{\delta \varphi_i} \, \delta\varphi_i + \partial_\mu j'_\mu \right) \ .$$

Но $\delta(\partial_\mu F_\mu)/\delta\varphi_i = 0$. Следовательно,

$$\delta S' = \int\limits_\Omega d^4x \left(\frac{\delta L}{\delta \varphi_i} \, \delta\varphi_i + \partial_\mu j'_\mu \right) \ . \tag{4}$$

С другой стороны, эта же вариация может быть записана в терминах старого действия:

$$\delta S' = \delta S + \int\limits_\Omega d^4x \, \partial_\mu \delta F_\mu \ . \tag{5}$$

Комбинируя (4) и (5) с (3), получаем:

$$\int\limits_\Omega d^4x \, (\partial_\mu j'_\mu - \partial_\mu j_\mu - \partial_\mu \delta F_\mu) = 0 \ .$$

Поскольку в этом уравнении все три функции j'_μ , j_μ и δF_μ локальные (т. е. они обращаются в ноль в тех областях, где $\delta\varphi_i = 0$), отсюда следует:

$$\int\limits_\Sigma d\sigma_\mu \, (j'_\mu - j_\mu - \delta F_\mu) = 0 \ .$$

Величину F_μ можно рассматривать как функционал на множестве функций φ_i . Используя тождество $\delta^2 = 0$, получаем:

$$\int\limits_\Sigma d\sigma_\mu \, \delta j'_\mu(x) = \int\limits_\Sigma d\sigma_\mu \, \delta j_\mu(x) \ .$$

Т. е. преобразование (1) оставляет симплектическую структуру на Z неизменной:

$$\omega' = \omega \ .$$

Список литературы

[1] E. Witten “Interacting field theory of open superstrings”, Nucl. Phys. **B276**, 291-324 (1986).

[2] Č. Crnković “Symplectic geometry and (super-) Poincaré algebra in geometrical theories”, Nucl. Phys. **B288**, 419-430 (1987).

[3] G. J. Zuckerman “Action principles and global geometry”, in *Mathematical aspects of string theory*, ed. S. T. Yau, Singapore: World Scientific, 259-284 (1987).

[4] Č. Crnković, E. Witten “Covariant description of canonical formalism in geometrical theories”, in *Three hundred years of gravitation*, eds. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge: Cambridge univ. press, 676-684 (1987).

[5] Č. Crnković “Symplectic geometry of the covariant phase-space”, Class. Quant. Grav. **5**(12), 1557-1575 (1988).

[6] G. Barnich, M. Henneaux, C. Schomblond “Covariant description of the canonical formalism”, Phys. Rev. D **44**(4), R939-R941 (1991).