О квантовании электромагнитного поля.
III. Формула для генераторов инфинитезимальных линейных канонических преобразований.

Д. А. Арбатский[*]

Март 2002 г.

Аннотация

Предложена формула для генераторов бесконечно малых линейных симплектических преобразований инвариантного фазового пространства. Обсуждаются применения этой формулы к классической и к квантовой теории поля. Показано существование генераторов группы симметрии для квантового случая.

1. Формула. В статье [I] использовалась формула, дающая генераторы бесконечно малых линейных преобразований для инвариантного гамильтонова формализма. Ввиду важности и общности этой формулы, здесь будут даны её вывод и обсуждение.

Итак, рассмотрим какое-нибудь линейное поле, описываемое инвариантным гамильтоновым формализмом. Будем, для определённости, искать для него генераторы группы Пуанкаре.

Поскольку симплектическая структура ω инвариантного фазового пространства Z предполагается пуанкаре-инвариантной, группа Пуанкаре действует на Z как непрерывная линейная симплектическая группа. Каждому бесконечно малому преобразованию этой группы[1] соответствует гамильтонов поток на Z . Гамильтониан этого потока является функцией на Z . Обозначим её $G^{\dot{-}}$. Найдём явный вид этой функции.

Во-первых, сразу ясно, что эта функция определена с точностью до аддитивной константы. Эту константу мы зафиксируем условием $G^{\underline{0}} = 0$, т. е. функция равна нулю на нулевом векторе пространства Z . Выражаясь более физическим языком, мы будем полагать, что вакуум классического поля обладает нулевыми энергией, импульсом и т. п.

Зафиксируем теперь в пространстве Z точку $\underline{c}$. Вектор скорости потока в этой точке обозначим $\underline{\delta c}$. Проведём из точки $\underline{0}$ в точку $\underline{c}$ отрезок, т. е. рассмотрим множество точек вида $\alpha\,\underline{c}$, $\alpha \in [0;1]$. Поскольку преобразования рассматриваемой группы линейны, в точке $\alpha\,\underline{c}$ скорость потока равна $\alpha\,\underline{\delta c}$. С другой стороны, вектор скорости потока связан с гамильтонианом соотношением:

$$dG\big|_{\alpha\underline{c}}^{\;\underline{b}} = \omega^{\,\underline{b}\,;\,\alpha\underline{\delta c}} \;, \tag{1}$$

выполняющимся для любого $\underline{b} \in Z$. Здесь левая часть обозначает дифференциал функции $G^{\dot{-}}$, вычисленный в точке $\alpha\,\underline{c}$ и взятый на векторе $\underline{b}$.

В качестве вектора $\underline{b}$ в уравнении (1) можно взять вектор $d\alpha\,\underline{c}$:

$$dG\big|_{\alpha\underline{c}}^{\;d\alpha\underline{c}} = \omega^{\,d\alpha\underline{c}\,;\,\alpha\underline{\delta c}} \;.$$

Используя билинейность формы ω , перепишем это так:

$$dG\big|_{\alpha\underline{c}}^{\;d\alpha\underline{c}} = \omega^{\,\underline{c}\,;\,\underline{\delta c}}\;\alpha\,d\alpha \;.$$

Интегрируя это соотношение по α в пределах от 0 до 1 , получаем формулу для генератора:

$$\boxed{G^{\underline{c}} = \tfrac{1}{2}\,\omega^{\,\underline{c}\,;\,\underline{\delta c}}} \tag{2}$$

[*] http://daarb.narod.ru/ , http://wave.front.ru/

[1] То есть элементу её алгебры Ли.

2. Применение к классической теории поля. Не следует думать, что формула (2) является просто другой записью формулы Нётер. Во-первых, она работает только в линейном случае. Во-вторых, она вовсе не предназначается для поиска *интегралов движения*, ибо у линейных полей они и так известны (уравнения движения решены). Несмотря на это, формула (2) оказывается очень удобной при практическом применении по многим причинам.

Во-первых, её применять значительно проще. Во-вторых, в отличие от формулы Нётер, она вовсе не привязана к координатному представлению. Если вид симплектической структуры ω известен, например, в фурье-представлении, и известно, как в этом представлении действует рассматриваемая группа (например, группа Пуанкаре), то генераторы получаются столь же просто, как и в координатном представлении.

Кроме того, в статье [II] мы видели, что структура инвариантного гамильтонова формализма не меняется, если к лагранжиану добавить полную дивергенцию. Поскольку формула (2) записана исключительно в терминах этого формализма, независимость генераторов от указанной подстановки оказывается очевидной.

В качестве простейшего примера рассмотрим скалярное поле. В статье [I] мы видели, что в Фурье-представлении симплектическая структура этого поля даётся формулой:

$$\omega^{\underline{\cdot}\,;\,\underline{\cdot}} = \int d\mu_m \cdot i\,\varepsilon(k) \cdot a(-k)^{\underline{\cdot}}\, a(k)^{\underline{\cdot}} \ . \tag{3}$$

Рассмотрим далее пространственно-временной сдвиг поля на бесконечно малый вектор $\delta\varepsilon_\nu$. Состояние $\underline{c}$ заменяется при этом на $\underline{c} + \underline{\delta c}$. При этом:

$$a(k)^{\underline{\delta c}} = i\,\delta\varepsilon_\nu\, k_\nu\, a(k)^{\underline{c}} \ .$$

Подставляя это выражение в формулу (2), с учётом формулы (3), получаем:

$$G^{\underline{c}} = -\,\tfrac{1}{2}\,\delta\varepsilon_\nu \int d\mu_m \cdot \varepsilon(k) \cdot k_\nu\, a(-k)^{\underline{c}}\, a(k)^{\underline{c}} = \,-\,\delta\varepsilon_\nu \int d\mu_m^+ \cdot k_\nu\, a^*(k)^{\underline{c}}\, a(k)^{\underline{c}} \ .$$

Коэффициент при $\delta\varepsilon_\nu$ обозначим теперь как $-P_\nu$. Опуская аргумент $\underline{c}$, имеем формулу для вектора энергии-импульса:

$$P_\nu = \tfrac{1}{2} \int d\mu_m \cdot \varepsilon(k) \cdot k_\nu\, a(-k)\, a(k) = \int d\mu_m^+ \cdot k_\nu\, a^*(k)\, a(k) \ . \tag{4}$$

3. О генераторах в квантовой теории поля. В статье [VI] мы опишем, каким образом осуществляется построение квантовых полей. Обсудим здесь, каким образом обстоят дела с поиском генераторов в квантовом случае.

Аналога теоремы Нётер в квантовой теории поля, насколько мне известно, до сих пор не предложено[2].

Заметим однако, что в случае инвариантного квантования полей в соответствии со схемой, изложенной в статье [VI], действие группы инвариантности естественно переносится на квантовое пространство состояний $\mathcal{H}$. Причём это действие унитарно (в случае индефинитного скалярного произведения — псевдоунитарно).

Если скалярное произведение в $\mathcal{H}$ является положительно-определённым, то в соответствии с теоремой Стоуна имеем самосопряжённый квантовый генератор. Если же скалярное произведение в $\mathcal{H}$ индефинитно, то дело обстоит столь же просто, но нужно вводить специальную математическую терминологию.

Таким образом, генераторы группы инвариантности могут быть строго введены и в квантовом случае.

Представляет интерес получить для квантовых генераторов также какие-нибудь удобные формулы.

Поскольку вакуум $|\,0\,\rangle$ квантованного поля остаётся при вышеуказанном действии группы симметрии инвариантным, то чисто формально, классические выражения типа (4) нужно просто записать, произведя нормальное упорядочение соответствующих операторов под знаком интеграла. В случае, если речь идёт о пуанкаре-инвариантном квантовании скалярного поля, приводящем к положительно-определённому скалярному произведению, получаем:

$$\hat{P}_\nu = \int d\mu_m^+ \cdot k_\nu\, \hat{a}^*(k)\, \hat{a}(k) \ . \tag{5}$$

[2] Многие очень авторитетные авторы утверждают обратное. Я позволю себе их мнение по данному вопросу проигнорировать.

При этом однако точный математический смысл приведённого выражения не вполне ясен[3]. Представляется актуальным построить теорию интегралов вида (5) и показать, что если подынтегральные выражения нормально упорядочены, то получаются в точности введённые нами генераторы.

[3]Как будет ясно из обсуждения квантования и топологических вопросов в статье [VI] символы вида $\hat{a}^*(k)$ имеют ясный смысл после подходящего усреднения. В приведённой же формуле производится интегрирование *произведения* таких символов.