О квантовании электромагнитного поля. IV. Теория полевых представлений.

Д. А. Арбатский*

Март 2002 г.

Аннотация

Вводится понятие об индуцированном симплектическом представлении группы Пуанкаре. Классические релятивистские поля рассматриваются как такие представления. Описывается методика исследования этих представлений в смысле их приводимости. Вводится понятие полевого осциллятора как индуцирующей гамильтоновой системы.

1. Симплектические представления. Группой Пуанкаре мы будем называть связную непрерывную десятипараметрическую группу преобразований пространства-времени, включающую в себя как однородные преобразования (группу Лоренца), так и пространственно-временные сдвиги. Мы будем обозначать группу Пуанкаре символом $\mathcal{P}$.

Поскольку в данном цикле статей мы изучаем поля, которые релятивистски инвариантны, всякое решение уравнений движения под действием преобразования из группы Пуанкаре переходит в решение. Таким образом, определяется действие группы Пуанкаре на инвариантном фазовом пространстве Z .

Более конкретно это действие можно описать так. Пусть задано преобразование $g \in \mathcal{P}$. На точки пространства-времени оно действует следующим образом:

$$x \;\to\; x' = gx \ .$$

В пространстве, где лежат значения полевой функции φ_i , преобразование g действует так:

$$\varphi_i \;\to\; \varphi_i' = \Lambda_{ij}\,\varphi_j \ .$$

Действие g в пространстве Z характеризуется формулами:

$$\underline{c} \longrightarrow \underline{gc} \ , \qquad \varphi_i(x)^{\,\underline{gc}} = \Lambda_{ij}\,\varphi_j(g^{-1}x)^{\,\underline{c}} \ . \tag{1}$$

Как уже было сказано в статье [I], мы здесь будем иметь дело с линейными полями. Действие группы Пуанкаре $\mathcal{P}$, очевидно, сохраняет линейную структуру в пространстве Z . Таким образом, в пространстве Z реализовано линейное представление группы Пуанкаре.

Кроме того, группа Пуанкаре сохраняет в пространстве Z симплектическую структуру. Таким образом, мы приходим к линейным *симплектическим* представлениям группы Пуанкаре $\mathcal{P}$. Связь симплектических представлений с унитарными станет ясна, когда мы определим операцию квантования поля в статье [VI]. Из проведённого там рассмотрения станет ясно, что симплектические представления, по-видимому, играют для теории поля роль не менее важную, чем унитарные. Во-всяком случае, с конструкцией квантованного поля они связаны более непосредственно.

2. „Приведение“ полевых представлений. Рассмотрим теперь вопрос о приводимости полевых представлений группы Пуанкаре $\mathcal{P}$. Приводимость будет здесь пониматься в комплексном смысле. Чтобы не комплексифицировать пространство Z , будем рассматривать комплексифицированное сопряжённое пространство $Z^*_{\mathbb{C}}$. В $Z^*_{\mathbb{C}}$, очевидно, действует сопряжённое представление группы $\mathcal{P}$. Чтобы определить это действие, нужно формулу (1) прочитать немного иначе:

$$\varphi_i(x)^{\,\underline{\cdot}} \longrightarrow \big(g\,\varphi_i(x)\big)^{\,\underline{\cdot}} \ , \qquad \big(g\,\varphi_i(x)\big)^{\,\underline{c}} = \Lambda_{ij}\,\varphi_j(g^{-1}x)^{\,\underline{c}} \ , \tag{2}$$

*http://daarb.narod.ru/ , http://wave.front.ru/

т. е. отнести символ g не к элементу Z , а к элементу $Z^*_{\mathbb{C}}$. В дальнейшем под полевым представлением мы будем понимать действие группы Пуанкаре по формуле (2) в комплексифицированном сопряжённом пространстве $Z^*_{\mathbb{C}}$.

Для бесконечномерных представлений понятие приводимости требует уточнения. Сейчас мы разъясним, как устроены полевые представления, которые мы здесь будем рассматривать, и одновременно уточним, в каком смысле мы будем понимать приводимость.

В случае унитарных представлений основным инструментом исследования является теорема Макки (см., например, [1]). Эта теорема сводит исследование представления группы Пуанкаре $\mathcal{P}$ к исследованию соответствующего представления малой группы Лоренца $\mathcal{L}_k$. Конструкцию индуцирования по Макки можно распространить и на произвольные линейные представления. Однако общее линейное представление (в том числе симплектическое) группы $\mathcal{P}$ может и не быть индуцированным с малой группы. Тем не менее, представления, индуцированные по Макки, составляют весьма широкий класс и мы здесь фактически ими ограничимся.

Произведём преобразование Фурье поля и представим фурье-образ в виде:

$$\widetilde{\varphi}_i(k) = 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\cdot a_i(k)\ . \tag{3}$$

Величину m естественно назвать, как и в квантовой теории, массой поля.

На основании формулы (3) естественно считать, что полевое представление распадается в прямую сумму положительно- и отрицательно-частотных подпредставлений:

$$Z^*_{\mathbb{C}} = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}} \oplus Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}\ .$$

Эти два представления мы также будем называть полевыми. Проекторы на положительно- и отрицательно-частотные подпространства в фурье-представлении устроены как операторы умножения на функции $\theta(+k)$ и $\theta(-k)$, соответственно.

Далее, поскольку мы имеем здесь дело с вещественными полями, $a_i(-k) = a^*_i(k)$. Поэтому естественно считать, что каждое из подпространств $Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$ и $Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$ приводимо ровно в той же мере, что и другое. В связи с этим можно ограничиться положительно-частотным подпространством.

Зафиксируем теперь вектор $k^{(0)}$ на массовой поверхности: $(k^{(0)})^2 = m^2$. Рассмотрим подгруппу группы Лоренца, оставляющую этот вектор неизменным, т. е. так называемую малую группу данного вектора. Обозначим эту группу $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$. Очевидно, набор величин $a_i(k^{(0)})$, соответствующий различным значениям индекса i , преобразуется линейно под действием преобразований из $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$. Это комплексное представление малой группы мы будем считать конечномерным. Аналогично унитарному случаю, будем говорить, что рассматриваемое полевое представление индуцировано данным представлением малой группы.

Будем далее по аналогии с унитарным случаем считать, что дальнейшая приводимость полевого представления (т. е. приведение его положительно-частотной части) целиком определяется приводимостью индуцирующего представления.

Заметим здесь ещё, что в случае массивных полей, т. е. когда $m > 0$, малая группа $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$ является группой трёхмерных вращений $SO(3)$. Эта группа компактна, и, следовательно, её представление может быть сделано унитарным путём введения надлежащего скалярного произведения. Поэтому индуцирующее представление оказывается вполне приводимым, и классы эквивалентности неприводимых компонент, так же как и в унитарном случае, определяются единственным целым или полуцелым числом. Это число, имея в виду связь с квантовым случаем, естественно назвать *спином* рассматриваемой неприводимой компоненты.

В случае же безмассового поля малая группа, как известно, является группой движений евклидовой плоскости $E(2)$. Эта группа некомпактна, и ситуация существенно усложняется по сравнению с унитарным случаем. Скоро мы это увидим на примере электромагнитного поля.

3. Полевой осциллятор как индуцирующая гамильтонова система. Нетрудно заметить, что между описаниями гармонического осциллятора и скалярного поля существует большое сходство. Сейчас мы изучим это явление более детально.

Рассмотрим произвольное вещественное поле, которое в фурье-представлении записывается в виде (3). Пусть скобки Пуассона полевых величин, взятых в фурье-представлении, имеют вид:

$$\{\,\widetilde{\varphi}_i(k)\,,\,\widetilde{\varphi}_j(k')\,\} = B_{ij}(k)\cdot\Big[\,i\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\Big]\cdot(2\pi)^4\delta(k+k')\ . \tag{4}$$

Здесь $B_{ij}(k)$ — некоторая тензорная функция. В случае скалярного поля и нефизического электромагнитного поля, как следует из формул статьи [I], эта функция просто является константой. В общем случае это однако не так. Рассмотрим поэтому её свойства более подробно.

Во-первых, поскольку $B_{ij}(k)$ домножается на $2\pi\,\delta(k^2 - m^2)$, можно считать, что она задана только на массовой поверхности $k^2 = m^2$. Во-вторых, используя антисимметрию скобки Пуассона, получаем:

$$B_{ij}(k) = B_{ji}(-k)\ . \tag{5}$$

Далее, требования релятивистской инвариантности накладывают на функцию $B_{ij}(k)$ очень жёсткие ограничения. Зафиксируем на массовой поверхности какую-нибудь точку $k^{(0)}$. Если известно значение функции $B_{ij}(k)$ в этой точке, то, используя лоренц-инвариантность, можно определить её значения во всех остальных точках. Значение же $B_{ij}(k^{(0)})$ также не является произвольным: оно должно быть инвариантным по отношению к действию малой группы $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$.

То, что скобка Пуассона является комплексификацией вещественной, накладывает на $B_{ij}(k)$ ещё одно условие: $B^*_{ij}(k) = B_{ij}(-k)$. С учётом (5) его также можно записать в виде $B^*_{ij}(k) = B_{ji}(k)$.

Рассмотрим теперь величины $a_i(+k^{(0)})$ и $a_i(-k^{(0)})$. Как было указано в пункте 2, они образуют представление малой группы $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$. Очевидно также, что указанные величины образуют представление группы сдвигов[1]. Сдвиг на 4-вектор l описывается формулами:

$$a_i(k^{(0)}) \,\rightarrow\, a_i(k^{(0)})\cdot e^{+ik^{(0)}l}\ , \qquad a_i(-k^{(0)}) \,\rightarrow\, a_i(-k^{(0)})\cdot e^{-ik^{(0)}l}\ .$$

Введём обозначение $\tau = k^{(0)}l$. Можно тогда считать, что величины $a_i(+k^{(0)})$ и $a_i(-k^{(0)})$ образуют представление группы $\mathbb{R}\times\mathcal{L}_{k^{(0)}}$, где $\mathbb{R}$ — аддитивная группа вещественных чисел, параметризованная числом τ .

Будем теперь рассматривать величины $a_i(+k^{(0)})$ и $a_i(-k^{(0)})$ как динамические переменные некоторой новой системы. Эту систему мы будем называть *полевым осциллятором.* С целью экономии обозначений будем записывать переменные полевого осциллятора теми же символами, но в качестве аргумента будем писать не вектор $k^{(0)}$, а вещественное число ω ; причём $\omega = +1$ соответствует $k = +k^{(0)}$, и $\omega = -1$ соответствует $k = -k^{(0)}$. Фазовое пространство полевого осциллятора получается овеществлением пространства индуцирующего представления. Скобку Пуассона зададим формулами:

$$\{\, a_i(+1)\,,\, a_j(+1)\,\} = \{\, a_i(-1)\,,\, a_j(-1)\,\} = 0\ ,$$

$$\{\, a_i(+1)\,,\, a_j(-1)\,\} = \, iB_{ij}(+1)\ .$$

Предполагая невырожденность скобки Пуассона, можно, как обычно, вычислить и симплектическую структуру.

Действие группы $\mathbb{R}\times\mathcal{L}_{k^{(0)}}$ на фазовом пространстве полевого осциллятора оставляет неизменной скобку Пуассона. Следовательно, оно является симплектическим.

При этом действие преобразования из $\mathbb{R}$, характеризуемого параметром τ , мы можем интерпретировать как временной сдвиг на промежуток времени τ („время“ полевого осциллятора — параметр безразмерный).

Можно даже определить „координаты“ полевого осциллятора в „момент времени“ t :

$$\varphi_i(t) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\, a_i(+1)\cdot e^{-it} + a_i(-1)\cdot e^{+it}\,\right)\ .$$

Видно, что у осциллятора вещественного поля координаты вещественны.

Далее, малая группа $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$, как абстрактная группа, от выбора вектора $k^{(0)}$ не зависит. Если осциллятор описывать во внутренних терминах гамильтонова формализма (фазовое пространство, симплектическая структура, симплектическое действие группы $\mathbb{R}\times\mathcal{L}_{k^{(0)}}$), то его конструкция также от выбора $k^{(0)}$ не зависит. Таким образом, каждому $\mathcal{P}$ -инвариантному полю однозначно сопоставляется $\mathbb{R}\times\mathcal{L}_{k^{(0)}}$ -инвариантный полевой осциллятор.

4. Представление скалярного поля. Применим теперь изложенную схему к скалярному полю. Индуцирующее представление в этом случае является одномерным тождественным представлением. Полевой осциллятор — обычный вещественный осциллятор с одной степенью свободы.

[1] Более общо можно сказать, что указанные величины образуют представление семипараметрической подгруппы группы Пуанкаре, включающей малую группу $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$ и сдвиги.

Таким образом, по отношению к действию группы Пуанкаре пространство $Z^*_{\mathbb{C}}$ распадается в прямую сумму положительно- и отрицательно-частотных приводящих подпространств, каждое из которых неприводимо. Эти два подпространства мы обозначим $Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$ и $Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$. Проекции элементов пространства $Z^*_{\mathbb{C}}$ на эти два подпространства будем снабжать значками $^{(+)}$ или $^{(-)}$, соответственно:

$$\widetilde{\varphi}^{\,(\pm)}(k) = \theta(\pm k)\,\widetilde{\varphi}(k)\;, \qquad \varphi^{\,(\pm)}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ikx}\,\widetilde{\varphi}^{\,(\pm)}(k)\;.$$

Используя формулы из статьи [I], можно вычислить скобки Пуассона этих проекций:

$$\{\,\widetilde{\varphi}^{\,(\pm)}(k)\,,\,\widetilde{\varphi}^{\,(\pm)}(k')\,\} = 0\;,$$

$$\{\,\widetilde{\varphi}^{\,(\pm)}(k)\,,\,\widetilde{\varphi}^{\,(\mp)}(k')\,\} = -\Big[\,i\,\theta(\pm k)\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2-m^2)\,\Big]\cdot(2\pi)^4\delta(k+k')\;.$$

В координатном представлении имеем, соответственно:

$$\{\,\varphi^{\,(\pm)}(x)\,,\,\varphi^{\,(\pm)}(x')\,\} = 0\;,$$

$$\{\,\varphi^{\,(\pm)}(x)\,,\,\varphi^{\,(\mp)}(x')\,\} = -D^{(\pm)}_m(x-x')\;.$$

Здесь символами $D^{(+)}_m(y)$ и $D^{(-)}_m(y)$ обозначены положительно- и отрицательно-частотная части функции $D_m(y)$:

$$D^{(\pm)}_m(y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-iky}\cdot\Big[\,i\,\theta(\pm k)\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2-m^2)\,\Big]\;. \qquad (6)$$

Приведённые формулы оказываются весьма полезными при вычислении пропагаторов квантованного поля. При этом сами по себе они естественно вытекают из классической теории.

5. Представление электромагнитного поля. Представление нефизического электромагнитного поля, согласно пункту 2, также распадается в прямую сумму положительно- и отрицательно-частотных подпредставлений. Формулы пункта 4 переписываются следующим образом:

$$\widetilde{A}^{(\pm)}_\mu(k) = \theta(\pm k)\,\widetilde{A}_\mu(k)\;, \qquad A^{(\pm)}_\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ikx}\,\widetilde{A}^{(\pm)}_\mu(k)\;,$$

$$\{\,\widetilde{A}^{(\pm)}_\mu(k)\,,\,\widetilde{A}^{(\pm)}_\nu(k')\,\} = 0\;,$$

$$\{\,\widetilde{A}^{(\pm)}_\mu(k)\,,\,\widetilde{A}^{(\mp)}_\nu(k')\,\} = g_{\mu\nu}\cdot\Big[\,i\,\theta(\pm k)\,\varepsilon(k)\cdot 2\pi\,\delta(k^2)\,\Big]\cdot(2\pi)^4\delta(k+k')\;,$$

$$\{\,A^{(\pm)}_\mu(x)\,,\,A^{(\pm)}_\nu(x')\,\} = 0\;,$$

$$\{\,A^{(\pm)}_\mu(x)\,,\,A^{(\mp)}_\nu(x')\,\} = g_{\mu\nu}\,D^{(\pm)}_0(x-x')\;.$$

Здесь $D^{(\pm)}_0(y)$ — функции (6) при $m=0$. В этом случае эти функции также можно записать в виде:

$$D^{(\pm)}_0(y) = \frac{1}{i\,(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{\pm\,y^2 - i\,0\cdot\varepsilon(y)} = \frac{1}{4\pi}\,\varepsilon(y)\,\delta(y^2) \pm \frac{1}{i\,(2\pi)^2}\,\mathcal{P}\,\frac{1}{y^2}\;.$$

Индуцирующее представление в этом случае — это комплексное векторное представление малой группы $\mathcal{L}_{k^{(0)}}$ при $(k^{(0)})^2 = 0$. Подробное описание этого представления имеется в статье [V]. Оно имеет два композиционных ряда:

$$\{0\} = M^0_{\mathbb{C}} \subset M^{\parallel}_{\mathbb{C}} \subset M^{(+1)}_{\mathbb{C}} \subset M^{\perp}_{\mathbb{C}} \subset M^4_{\mathbb{C}} = M_{\mathbb{C}}\;,$$

$$\{0\} = M^0_{\mathbb{C}} \subset M^{\parallel}_{\mathbb{C}} \subset M^{(-1)}_{\mathbb{C}} \subset M^{\perp}_{\mathbb{C}} \subset M^4_{\mathbb{C}} = M_{\mathbb{C}}\;.$$

При индуцировании эти композиционные ряды переходят в композиционные ряды полевого представления:

$$\{0\} = Z^{*\,(+)\,0}_{\mathbb{C}} \subset Z^{*\,(+)\,\parallel}_{\mathbb{C}} \subset Z^{*\,(+)\,(+1)}_{\mathbb{C}} \subset Z^{*\,(+)\,\perp}_{\mathbb{C}} \subset Z^{*\,(+)\,4}_{\mathbb{C}} = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}\;,$$

$$\{0\} = Z^{*\,(+)\,0}_{\mathbb{C}} \subset Z^{*\,(+)\,\parallel}_{\mathbb{C}} \subset Z^{*\,(+)\,(-1)}_{\mathbb{C}} \subset Z^{*\,(+)\,\perp}_{\mathbb{C}} \subset Z^{*\,(+)\,4}_{\mathbb{C}} = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}\;.$$

Здесь обозначения для подпространств естественно согласованы с обозначениями статьи [I].

Полевой осциллятор в данном случае оказывается системой с восьмимерным фазовым пространством.

В связи с разделением поля на положительно- и отрицательно-частотные части, отметим также, что поскольку электромагнитное поле вещественно, условие Лоренца на состояния рассеяния можно записать тремя эквивалентными способами:

$$- i\, k_\mu\, a_\mu(k) \stackrel{\mathrm{rad}}{=} 0 \ ,$$

$$- i\, k_\mu\, a_\mu^{(+)}(k) \stackrel{\mathrm{rad}}{=} 0 \ ,$$

$$- i\, k_\mu\, a_\mu^{(-)}(k) \stackrel{\mathrm{rad}}{=} 0 \ .$$

Поскольку при квантовании положительно- и отрицательно-частотные части поля играют различные роли, то, как станет ясно из статьи [VI], в квантовой теории имеется аналог лишь второго варианта этого условия.

Список литературы

[1] Дж. Макки *„Представления групп в гильбертовом пространстве“*, приложение в кн. [2]. [G. W. Mackey “Group representations in Hilbert space”, appendix in the book [2].]

[2] И. Сигал *„Математические проблемы релятивистской физики“*, М.: Мир (1968). [I. E. Segal *“Mathematical problems of relativistic physics”*, Providence, Rhode island: AMS (1963).]