О квантовании электромагнитного поля. V. Векторное представление малой группы Лоренца для светоподобного импульса.

Д. А. Арбатский*

Март 2002 г.

Аннотация

С использованием элементарных геометрических методов устанавливается изоморфизм малой группы Лоренца для светоподобного импульса и группы движений евклидовой плоскости. В соответствии с теоремой Жордана-Гёльдера-Нётер производится „приведение“ вещественного и комплексного векторных представлений этой группы. Доказывается неразложимость этих представлений.

1. Предварительные замечания. Книг, в которых излагается теория группы Лоренца $\mathcal{L}$ и теория представлений этой группы, имеется довольно много. В том числе имеются монографии, специально посвящённые этой теме; например, [1, 2, 3]. Всюду отмечается, что малая группа Лоренца $\mathcal{L}_k$ для светоподобного импульса[1] k изоморфна группе движений евклидовой плоскости $E(2)$. Доказательство, которое при этом приводится, обычно основывается на аналитическом изучении группы $SL(2,\mathbb{C})$, которая является универсальной накрывающей группы Лоренца.

Такой подход, по-видимому, является оптимальным, когда в дальнейшем ставится задача изучения произвольных (в том числе двузначных) представлений группы $\mathcal{L}_k$. При этом однако понять геометрический смысл изоморфизма $\mathcal{L}_k$ и $E(2)$ представляется затруднительным[2].

Уточним здесь, что обычно понимается под „геометрическим смыслом“. С точки зрения физических приложений, группа Лоренца наиболее естественно определяется своим векторным представлением[3]. При этом малая группа $\mathcal{L}_k$ определяется просто как стационарная подгруппа вектора k . Группа $E(2)$, в свою очередь, определяется как группа движений евклидовой плоскости. Имея в виду эти определения групп $\mathcal{L}_k$ и $E(2)$, с помощью чисто геометрических построений мы отыщем некоторую двумерную плоскость, обладающую естественной евклидовой структурой, на которой группа $\mathcal{L}_k$ будет действовать как группа движений.

Другой вопрос, которым мы будем здесь заниматься (и который является главной мотивацией для опубликования данной статьи) — это „приведение“ векторного представления группы $\mathcal{L}_k$, т. е. мы выясним, из каких неприводимых представлений оно состоит. С точки зрения общей теории представлений, этот случай является очень частным и не содержит каких-либо специфических трудностей. Однако ввиду его большой практической важности, представляется полезным провести его рассмотрение с использованием построений, наиболее отвечающих нашей геометрической интуиции.

Вещественное векторное представление

2. Обозначения и терминология. *Пространством Минковского* M называется четырёхмерное вещественное линейное пространство $\mathbb{R}^4$, в котором задана вещественная симметричная билинейная форма

*http://daarb.narod.ru/ , http://wave.front.ru/

[1]Слово „импульс“ употребляется, поскольку имеются в виду приложения к теории безмассовых полей; в частности, электромагнитного. Пока мы занимаемся чисто математическим исследованием, можно считать, что речь идёт о произвольном изотропном векторе k : $k^2 = 0$.

[2]В частности, Райдер [4] по этому поводу заметил, что „физический смысл этого результата не ясен“.

[3]Такое представление иногда называют „фундаментальным“.

$g(\cdot\,,\cdot)$, имеющая сигнатуру $(+,-,-,-)$. Эта форма называется *скалярным произведением.* Для краткости вместо $g(a,b)$ мы будем писать просто ab или $a\cdot b$.

Рассмотрим теперь группу всех линейных преобразований пространства Минковского M , сохраняющих скалярное произведение. Связная компонента этой группы, содержащая единицу, сама является группой. Эту последнюю группу мы будем называть *группой Лоренца* и обозначать её $\mathfrak{L}$.

На протяжении всей статьи мы будем иметь дело с векторным представлением группы Лоренца, то есть с представлением в самом пространстве Минковского. Это представление будет обозначаться как T .

Малой группой вектора k называется стационарная подгруппа вектора k , т. е. подгруппа группы Лоренца, оставляющая вектор k неизменным. Она будет обозначаться как $\mathfrak{L}_k$.

Вектор k называется *времениподобным*, если $k^2>0$; *светоподобным* или *изотропным*, если $k^2=0$; и *пространственноподобным*, если $k^2<0$.

Рассмотрим также группу всех преобразований евклидовой плоскости, сохраняющих расстояние. Связная компонента этой группы, содержащая единицу, сама является группой. Мы будем её называть *группой движений евклидовой плоскости* и обозначать $E(2)$.

3. Приводящие подпространства. Следуя теореме Жордана-Гёльдера-Нётер, попробуем сразу угадать композиционный ряд представления T , т. е. такой монотонный набор приводящих подпространств представления T , чтобы соответствующие последовательные факторпредставления оказались неприводимыми:

$$\{0\}=M^0\subset M^{\parallel}\subset M^{\perp}\subset M^4=M\ . \tag{1}$$

Здесь M^0 — нулевое подпространство в M ; $M^{\parallel}$ — подпространство, содержащее все векторы, параллельные k ; $M^{\perp}$ — подпространство, содержащее все векторы, ортогональные k ; M^4 — другое обозначение пространства Минковского.

Каждое из этих подпространств, очевидно, инвариантно по отношению к действию группы $\mathfrak{L}_k$. Подпредставления в подпространствах $M^{\parallel}$ и $M^{\perp}$ обозначим $T^{\parallel}$ и $T^{\perp}$, соответственно.

Далее, набору (1) соответствует последовательность из трёх последовательных факторпредставлений в факторпространствах $M^{\parallel}/M^0=M^{\parallel}$, $M^{\perp}/M^{\parallel}=M^{\perp/\parallel}$ и $M^4/M^{\perp}=M^{4/\perp}$. Первое из этих факторпредставлений является подпредставлением. Мы его уже обозначили как $T^{\parallel}$. Второе и третье факторпредставления обозначим $T^{\perp/\parallel}$ и $T^{4/\perp}$, соответственно.

Неприводимость факторпредставлений $T^{\parallel}$ и $T^{4/\perp}$ не вызывает сомнений по причине их одномерности. Что касается факторпредставления $T^{\perp/\parallel}$, то его неприводимость (вещественную) мы установим в пункте 6.

В пунктах 7 и 8 будут доказаны две леммы из которых следует, что кроме подпространств (1), других приводящих подпространств у представления T нет. Тем самым, композиционный ряд (1) является единственным. Поэтому в данном случае утверждение теоремы Жордана-Гёльдера-Нётер о том, что все композиционные ряды имеют одинаковую длину и соответствующие факторпредставления у этих рядов эквивалентны, оказывается тривиальным.

4. Гомоморфизм $\mathfrak{L}_k$ в $E(2)$. Рассмотрим теперь в пространстве Минковского трёхмерную гиперплоскость N , задаваемую уравнением:

$$k\cdot x=const\neq 0\ . \tag{2}$$

Поскольку группа $\mathfrak{L}_k$ оставляет вектор k неизменным и сохраняет скалярное произведение, гиперплоскость N инвариантна относительно действия группы $\mathfrak{L}_k$.

Введём теперь для векторов из N отношение эквивалентности $\sim$:

$$a\sim b\iff a-b\in M^{\parallel}\ , \tag{3}$$

Иначе говоря, два вектора эквивалентны, если их концы лежат на прямой, параллельной k . Ввиду (1) и (2) каждая такая прямая целиком содержится в гиперплоскости N . Факторизуя N по отношению эквивалентности (3), получаем некоторую двумерную плоскость[4] $\widetilde{N}$. Мы будем обозначать точки из $\widetilde{N}$ и соответствующие им прямые на N одинаковыми символами: $\widetilde{a}$, $\widetilde{c}$ и т. п.

[4]Плоскость $\widetilde{N}$ не является *вложенной* в пространство Минковского.

Плоскость $\widetilde{N}$ обладает естественной евклидовой структурой. В самом деле, возьмём две произвольные точки $\widetilde{a}$ и $\widetilde{c}$ на $\widetilde{N}$. Каждая из них — это класс эквивалентности точек на N . Возьмём по одному произвольному представителю каждого из этих двух классов: a и c , соответственно. Вычислим величину

$$\rho\,(a, c) = \sqrt{(a-c)^2}\ . \tag{4}$$

Эта величина не зависит от выбора представителей a и c . Действительно, заменим, скажем, a на $a+\alpha k$. Учитывая (2), имеем:

$$\rho\,(a+\alpha k, c) = \sqrt{(a-c+\alpha k)^2} = \sqrt{(a-c)^2 + 2\alpha(ka-kc)+\alpha^2 k^2} = \sqrt{(a-c)^2} = \rho\,(a,c)\ .$$

Кроме того, $(a-c)^2$ всегда больше нуля, и функция $\rho\,(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ обладает всеми свойствами евклидовой метрики, поскольку плоскость $\widetilde{N}$ можно отождествить с любой из пространственно-подобных двумерных плоскостей, содержащихся в N .

Теперь заметим, что и отношение эквивалентности (3) и метрика $\rho\,(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ инвариантны относительно действия малой группы $\mathfrak{L}_k$. Таким образом, построено гомоморфное отображение группы $\mathfrak{L}_k$ в группу движений $E(2)$ евклидовой плоскости $\widetilde{N}$.

5. Обратное отображение. В дальнейшем мы будем неоднократно использовать следующие два предложения, верные как в вещественном, так и в комплексном случае.

П р е д л о ж е н и е. *Если линейное преобразование действует на некоторый базис $\{n^i\}_{i=1..4}$ так, что оказываются неизменными скалярные произведения элементов базиса (включая квадраты базисных элементов), то это преобразование сохраняет скалярное произведение.*

П р е д л о ж е н и е. *Если линейное преобразование действует на некоторый базис $\{n^i\}_{i=1..4}$ так, что оказываются неизменными все величины $(n^i - n^j)^2$ и $(n^i)^2$, то это преобразование сохраняет скалярное произведение.*

Первое предложение следует из того, что всякий вектор можно разложить по векторам базиса. Второе предложение следует из первого с учётом формулы:

$$(n^i - n^j)^2 = (n^i)^2 + (n^j)^2 - 2n^i n^j\ .$$

Зафиксируем теперь произвольное движение плоскости $\widetilde{N}$. Преобразование из малой группы $\mathfrak{L}_k$, которое при построенном в пункте 4 гомоморфизме переходит в данное движение на $\widetilde{N}$, будем называть *искомым.* Покажем, что искомое преобразование из $\mathfrak{L}_k$ существует и единственно. Тем самым будет установлено, что рассматриваемый гомоморфизм на самом деле является изоморфизмом.

Для этого рассмотрим семейство гиперповерхностей, задаваемых уравнениями вида

$$x^2 = const\ . \tag{5}$$

Пересечение любой из них с гиперплоскостью N является параболоидом. Каждый такой параболоид инвариантен относительно искомого преобразования. При этом каждая прямая, представляющая собой точку из $\widetilde{N}$, пересекает такой параболоид ровно в одной точке, и через каждую точку параболоида проходит ровно одна такая прямая. Следовательно, определено действие искомого преобразования на любом из параболоидов.

Возьмём теперь на одном из параболоидов четыре точки, не принадлежащие никакой двумерной плоскости. Четыре вектора $\{n^i\}_{i=1..4}$, концами которых являются эти четыре точки, образуют базис в M . Определённое нами на параболоиде преобразование сохраняет величины $(n^i - n^j)^2$, т. к. каждая из них — это квадрат соответствующего расстояния в $\widetilde{N}$. Величины $(n^i)^2$ также сохраняются, т. к. они постоянны на параболоиде. Продолжим теперь по линейности построенное преобразование векторов базиса на всё пространство M . Как следует из второго предложения, сформулированного в начале этого пункта, получится преобразование, сохраняющее скалярное произведение в M . Кроме того, по построению, данное преобразование сохраняет плоскость (2), а потому оно сохраняет неизменным вектор k . Так как исходное движение плоскости $\widetilde{N}$ предполагалось принадлежащим связной группе $E(2)$, построенное преобразование в M принадлежит связной группе $\mathfrak{L}_k$.

Построенное преобразование является единственным, могущим претендовать на роль искомого. С другой стороны, построенное преобразование из $\mathfrak{L}_k$ при гомоморфизме из пункта 4 переходит в некоторое движение на $\widetilde{N}$. Это движение, по построению, действует на четыре точки[5] $\widetilde{n}^i \in \widetilde{N}$ так же, как и исходное движение в $\widetilde{N}$. Поскольку движение евклидовой плоскости однозначно определяется своим действием даже на две несовпадающие точки, построенное преобразование из $\mathfrak{L}_k$ является искомым. Таким образом, доказана

Т е о р е м а. *Группы* $\mathfrak{L}_k$ *и* $E(2)$ *изоморфны.*

6. Факторпредставление $T^{\perp/\parallel}$ **.** Аналогично построенной в пункте 4 факторплоскости $\widetilde{N}$, факторпространство $M^{\perp/\parallel}$ обладает естественной евклидовой структурой[6], она даётся той же формулой (4). Таким образом, малая группа $\mathfrak{L}_k$ действует в $M^{\perp/\parallel}$ как группа вращений евклидовой плоскости вокруг фиксированной точки. Такая группа обозначается как $SO(2)$.

Очевидно, в евклидовой плоскости нет такого направления, которое оставалось бы инвариантным при вращениях. Отсюда вытекает

Т е о р е м а. *Факторпредставление* $T^{\perp/\parallel}$ *неприводимо (в вещественном смысле).*

7. Неразложимость представления T **.** Предположим, что представление T разложимо, то есть пространство M представимо в виде прямой суммы $M = M' \oplus M''$ двух нетривиальных приводящих подпространств M' и M'' . Одно из этих подпространств, например M' , обязательно содержит какой-нибудь вектор, не содержащийся в $M^\perp$. При подходящем выборе константы в уравнении (2) конец этого вектора будет лежать в плоскости N . В пункте 5 мы видели, что преобразованиями из $\mathfrak{L}_k$ этот вектор может быть переведён в любой другой вектор, конец которого лежит на том же параболоиде. В том числе он может быть переведён в четыре вектора $\{n^i\}_{i=1..4}$, составляющие базис в M . Следовательно, M' должно совпадать со всем M . Таким образом, доказана

Л е м м а. *Всякое приводящее подпространство представления* T *либо совпадает со всем пространством* M *, либо содержится в* $M^\perp$ *.*

Из неё вытекает

Т е о р е м а. *Представление* T *неразложимо.*

8. Неразложимость представления $T^\perp$ **.** Рассмотрим цилиндр, задаваемый уравнениями:

$$k \cdot x = 0 \ , \qquad x^2 = const \neq 0 \ . \tag{6}$$

Докажем, что $\mathfrak{L}_k$ действует на нём транзитивно, т. е. всякая точка на цилиндре, может быть переведена во всякую другую. Обозначим вектор, конец которого указывает в исходную точку, как $e^1(0)$, а вектор, указывающий в конечную, как $e^1(1)$. Так как цилиндр связен, то эти две точки можно соединить непрерывной кривой $e^1(t)$, $t \in [0;1]$.

Введём также вектор $e^2(t)$, непрерывно зависящий от t . Будем считать, что конец вектора $e^2(t)$ всегда лежит на некотором одном цилиндре вида (6). Кроме того, потребуем, чтобы скалярное произведение $e^1(t) \cdot e^2(t) = const$ не зависело от t . И ещё потребуем, чтобы векторы k , $e^1(t)$ и $e^2(t)$ были линейно независимы при $t = 0$ и, следовательно, линейно независимы при произвольном t .

Вектор $e^2(t)$ определён, конечно, неоднозначно. Его всегда можно заменить на $e^2(t) + \alpha(t)\,k$, где $\alpha(t)$ — произвольная непрерывная функция. Указанную неоднозначность мы фиксировать никак не будем.

Примем теперь три вектора k , $e^1(t)$ и $e^2(t)$ за базис в $M^\perp$. Применяя трёхмерный вариант первого предложения из пункта 5, получаем непрерывное семейство линейных преобразований в $M^\perp$, сохраняющих в $M^\perp$ скалярное произведение.

Покажем теперь, что эти преобразования можно достроить до преобразований из $\mathfrak{L}_k$. Для этого возьмём произвольный вектор $n(0)$, не принадлежащий подпространству $M^\perp$. Векторы k , $e^1(t)$, $e^2(t)$ и $n(0)$ образуют базис в пространстве Минковского M . Покажем, что при произвольном t вектор $n(t)$ можно выбрать так, что следующие четыре величины не будут зависеть от t :

$$k \cdot n(t) = const \ , \qquad e^1(t) \cdot n(t) = const \ , \qquad e^2(t) \cdot n(t) = const \ , \qquad (n(t))^2 = const \ . \tag{7}$$

Первые три условия при фиксированном t выделяют в пространстве Минковского M прямую $\widetilde{n}$, являющуюся точкой факторплоскости $\widetilde{N}$, построенной в пункте 4. Как было указано в пункте 5, на этой прямой

[5] Прямые, содержащие концы векторов базиса $\{n^i\}_{i=1..4}$

[6] Более того, $M^{\perp/\parallel}$ линейно, и в нём имеется соответствующее скалярное произведение: $\widetilde{a} \cdot \widetilde{c} = ac$.

имеется ровно одна точка, удовлетворяющая четвёртому из уравнений (7). Это и есть точка, в которую указывает искомый вектор $n(t)$.

Применяя теперь первое предложение из пункта 5, видим, что построено непрерывное семейство преобразований из $\mathfrak{L}_k$, переводящих заданную точку цилиндра (6) в любую другую заданную точку. Итак, доказана

Л е м м а. *Преобразования малой группы* $\mathfrak{L}_k$ *действуют на цилиндре* (6) *транзитивно.*

Попутно нами было доказано следующее

П р е д л о ж е н и е. *Линейное преобразование пространства* $M^\perp$ *, сохраняющее в нём скалярное произведение, может быть единственным образом достроено до линейного преобразования пространства* M *, сохраняющего скалярное произведение в* M *.*

Предположим теперь, что представление $T^\perp$ разложимо, т. е. пространство $M^\perp$ распадается в прямую сумму $M^\perp = M' \oplus M''$ двух приводящих подпространств M' и M'' . Одно из этих подпространств, например M' , обязательно содержит какой-нибудь вектор, не содержащийся в $M^\parallel$. Конец этого вектора лежит на соответствующем цилиндре (6). Но тогда, как было только что показано, и весь цилиндр должен содержаться в M' . Но линейная оболочка цилиндра (6) совпадает с $M^\perp$, и, следовательно, $M' = M^\perp$. Таким образом, доказана

Л е м м а. *Всякое приводящее подпространство представления* $T^\perp$ *либо совпадает с* $M^\perp$ *, либо содержится в* $M^\parallel$ *.*

Из неё вытекает

Т е о р е м а. *Представление* $T^\perp$ *неразложимо.*

Комплексное векторное представление

9. Комплексификация. Как было показано в статье [IV], при исследовании электромагнитного поля полезно изучить также комплексное векторное представление малой группы $\mathfrak{L}_k$. Чтобы получить это представление, нужно просто допустить, что компоненты рассматриваемых векторов могут быть комплексными числами, и считать, что представление группы $\mathfrak{L}_k$ действует в нём по тем же формулам, что и в вещественном случае. Сама группа $\mathfrak{L}_k$ при этом никак не изменяется.

Комплексифицированное пространство Минковского будет обозначаться как $M_\mathbb{C}$. Вообще, далее все пространства и представления будут помечаться значком соответствующего им поля скаляров. Если два пространства обозначаются одинаково и различаются только указанным значком, то предполагается, что комплексное пространство является комплексификацией вещественного. Например, вещественное пространство Минковского, будет обозначаться как $M_\mathbb{R}$. Мы будем также полагать, что вещественные пространства являются подмножествами соответствующих комплексных. Представление группы $\mathfrak{L}_k$, действующее в $M_\mathbb{C}$, обозначим $T_\mathbb{C}$.

Произвольный вектор $n \in M_\mathbb{C}$ может быть представлен в виде суммы своей вещественной и мнимой частей: $n = n^{\mathrm{Re}} + in^{\mathrm{Im}}$. Здесь $n^{\mathrm{Re}}, n^{\mathrm{Im}} \in M_\mathbb{R}$. Поскольку преобразования группы $\mathfrak{L}_k$ являются преобразованиями с вещественными коэффициентами, можно считать, что преобразованию комплексного вектора соответствует одновременное преобразование его вещественной и мнимой частей.

Все найденные в вещественном случае приводящие подпространства и факторпространства, очевидно, комплексифицируются. Полной аналогии однако между представлениями $T_\mathbb{R}$ и $T_\mathbb{C}$ нет. Приводимость и разложимость комплексифицированных представлений нужно исследовать дополнительно. При доказательстве неразложимости комплексных представлений важную роль будет играть следующая

Л е м м а. *Пусть заданы: вектор* $n \in M_\mathbb{C}$ *; некоторое двумерное подпространство* $P^2_\mathbb{R}$ *в* $M_\mathbb{R}$ *, такое, что* $n \in P^2_\mathbb{C}$ *; и некоторое одномерное подпространство* $P^1_\mathbb{R}$ *в* $P^2_\mathbb{R}$ *, такое, что* $n \notin P^1_\mathbb{C}$ *. Тогда, умножая* n *на подходящий множитель* $\theta \in \mathbb{C}$ *, можно добиться, чтобы* $(\theta n)^{\mathrm{Im}} \in P^1_\mathbb{R}$ *и* $(\theta n)^{\mathrm{Re}} \notin P^1_\mathbb{R}$ *.*

Чтобы доказать эту лемму, умножим исходный комплексный вектор n на число вида $e^{i\varphi}$, где переменная φ пробегает множество вещественных чисел. При изменении переменной φ векторы $n^{\mathrm{Re}}(t)$ и $n^{\mathrm{Im}}(t)$ будут двигаться по некоторому эллипсу в плоскости $P^2_\mathbb{R}$ (если n^{Re} и n^{Im} параллельны, эллипс вырождается в отрезок). Этот эллипс пересекается с любым одномерным подпространством $P^1_\mathbb{R}$, содержащимся в $P^2_\mathbb{R}$. Отсюда очевидно, что при подходящем φ мнимая часть вектора окажется в $P^1_\mathbb{R}$, а вещественная там содержаться не будет.

10. Разложимость $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$. Как было показано в пункте 6, в пространстве $M_{\mathbb{R}}^{\perp/\|}$ малая группа $\mathcal{L}_k$ действует, как группа $SO(2)$. Поскольку группа $SO(2)$ абелева, то, как следует из леммы Шура, комплексное представление $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$ обязано быть приводимым. Кроме того, поскольку группа $SO(2)$ компактна, представление $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$ эквивалентно некоторому унитарному и, следовательно, вполне приводимо. Соответствующие подпредставления обозначим $T_{\mathbb{C}}^{(+1)/\|}$ и $T_{\mathbb{C}}^{(-1)/\|}$.

Чтобы сделать этот результат более конкретным, введём в вещественном пространстве $M_{\mathbb{R}}^{\perp/\|}$ ортонормированный базис $\{\tilde{e}^i\}_{i=1,2}$. При этом матрицы представления $T_{\mathbb{R}}^{\perp/\|}$ примут вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Если теперь в комплексной плоскости $M_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$ перейти к комплексному „спиральному“ базису $\{\tilde{e}^{(\lambda)}\}_{\lambda=\pm1}$:

$$\tilde{e}^{(\pm1)} = \frac{\tilde{e}^1 \pm i\,\tilde{e}^2}{\sqrt{2}} \ ,$$

то матрицы представления $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$ окажутся диагональными:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{+i\varphi} \end{pmatrix}$$

Таким образом, доказана

Т е о р е м а. *Представление $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$ имеет ровно два приводящих подпространства: $M_{\mathbb{C}}^{(+1)/\|}$ и $M_{\mathbb{C}}^{(-1)/\|}$. Соответствующие им подпредставления дают в сумме представление $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$:*

$$T_{\mathbb{C}}^{\perp/\|} = T_{\mathbb{C}}^{(+1)/\|} \oplus T_{\mathbb{C}}^{(-1)/\|} \ .$$

В применении к электромагнитному полю (см. [IV]), приведённая теорема означает существование плоских монохроматических волн со спиральностями $+1$ и -1 — факт общеизвестный.

Заметим ещё вот что:

а. Поскольку в пространстве Минковского изначально не вводилось никакой ориентации, на плоскости $M_{\mathbb{R}}^{\perp/\|}$ её тоже нет. Поэтому невозможно сказать, какое из двух пространств обозначается $M_{\mathbb{C}}^{(+1)/\|}$, а какое $M_{\mathbb{C}}^{(-1)/\|}$. Фиксацией этих обозначений фактически вводится ориентация.

б. Если группу Лоренца расширить до *полной* группы Лоренца, включив туда пространственные отражения, то малая группа тоже расширится. При этом группа $SO(2)$, действующая в плоскости $M_{\mathbb{R}}^{\perp/\|}$ расширится до $O(2)$. При отражениях комплексные пространства $M_{\mathbb{C}}^{(+1)/\|}$ и $M_{\mathbb{C}}^{(-1)/\|}$ будут переходить друг в друга, и комплексное представление в пространстве $M_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$ станет уже неприводимым.

11. Подпредставления $T_{\mathbb{C}}^{(+1)}$ и $T_{\mathbb{C}}^{(-1)}$. В соответствии с установленной в пункте 10 разложимостью факторпредставления $T_{\mathbb{C}}^{\perp/\|}$, в комплексном пространстве Минковского $M_{\mathbb{C}}$ можно выделить два двумерных приводящих подпространства представления $T_{\mathbb{C}}$. Эти два подпространства мы обозначим $M_{\mathbb{C}}^{(+1)}$ и $M_{\mathbb{C}}^{(-1)}$. Соответствующие одномерные факторпространства $M_{\mathbb{C}}^{(+1)}/M_{\mathbb{C}}^{\|} = M_{\mathbb{C}}^{(+1)/\|}$ и $M_{\mathbb{C}}^{(-1)}/M_{\mathbb{C}}^{\|} = M_{\mathbb{C}}^{(-1)/\|}$ были введены в пункте 10.

Теперь ясно, что в комплексном случае ряд (1) допускает уплотнение двумя способами:

$$\{0\} = M_{\mathbb{C}}^{0} \subset M_{\mathbb{C}}^{\|} \subset M_{\mathbb{C}}^{(+1)} \subset M_{\mathbb{C}}^{\perp} \subset M_{\mathbb{C}}^{4} = M_{\mathbb{C}} \ , \tag{8}$$

$$\{0\} = M_{\mathbb{C}}^{0} \subset M_{\mathbb{C}}^{\|} \subset M_{\mathbb{C}}^{(-1)} \subset M_{\mathbb{C}}^{\perp} \subset M_{\mathbb{C}}^{4} = M_{\mathbb{C}} \ , \tag{9}$$

В пункте 13 будет показано, что других приводящих подпространств у комплексного векторного представления нет. Таким образом, кроме (8) и (9), других композиционных рядов у представления $T_{\mathbb{C}}$ нет.

12. Неразложимость представления $T_{\mathbb{C}}$. Предположим, что представление $T_{\mathbb{C}}$ разложимо, т. е. пространство $M_{\mathbb{C}}$ представляется в виде суммы

$$M_{\mathbb{C}} = M'_{\mathbb{C}} \oplus M''_{\mathbb{C}} \tag{10}$$

двух приводящих подпространств $M'_{\mathbb{C}}$ и $M''_{\mathbb{C}}$. Тогда одно из этих подпространств, например $M'_{\mathbb{C}}$, обязательно содержит некоторый вектор n , не содержащийся в $M^{\perp}_{\mathbb{C}}$. Согласно лемме из пункта 9, можно без ущерба для общности считать, что $n^{\mathrm{Im}} \in M^{\perp}_{\mathbb{R}}$ и $n^{\mathrm{Re}} \notin M^{\perp}_{\mathbb{R}}$.

Введём теперь некоторый вещественный вектор e^1 . В случае если вектор n^{Im} не содержится в $M^{\|}_{\mathbb{R}}$, e^1 будет просто другим обозначением для n^{Im} . Если же n^{Im} содержится в $M^{\|}_{\mathbb{R}}$, то за e^1 примем произвольный вектор, такой, что $e^1 \in M^{\perp}_{\mathbb{R}}$ и $e^1 \notin M^{\|}_{\mathbb{R}}$.

Рассмотрим теперь подгруппу малой группы $\mathfrak{L}_k$, оставляющую вектор e^1 неизменным. Эта подгруппа, согласно определению вектора e^1 , в любом случае оставляет неизменным вектор n^{Im} . Из результатов пункта 8 следует, что элементы этой группы могут задаваться некоторым вектором e^2 , конец которого всегда лежит на некотором цилиндре (6), выполняется условие $e^1 \cdot e^2 = const$, и векторы k , e^1 и e^2 линейно независимы. Конец вектора e^2 при этом пробегает некоторую прямую, параллельную k : $e^2(t) = e^2(0) + tk$. Уравнения (7) для вектора $n^{\mathrm{Re}}(t)$ принимают вид:

$$k \cdot n^{\mathrm{Re}}(t) = const\ , \qquad e^1 \cdot n^{\mathrm{Re}}(t) = const\ , \qquad e^2(t) \cdot n^{\mathrm{Re}}(t) = const\ , \qquad (n^{\mathrm{Re}}(t))^2 = const\ .$$

Третье уравнение можно расписать подробнее:

$$(e^2(0) + tk) \cdot n^{\mathrm{Re}}(t) = const\ . \tag{11}$$

Очевидно, если предположить, что $(n^{\mathrm{Re}}(t) - n^{\mathrm{Re}}(0)) \in M^{\|}$, то уравнению (11) при $t \neq 0$ удовлетворить невозможно. Следовательно, подпространство $M'_{\mathbb{C}}$ должно содержать и некоторый вещественный вектор, содержащийся в $M^{\perp}_{\mathbb{R}}$ и не содержащийся в $M^{\|}_{\mathbb{R}}$. Но тогда, согласно второй лемме пункта 8, должно быть $M^{\perp}_{\mathbb{R}} \subset M'_{\mathbb{C}}$, и, следовательно, $M^{\perp}_{\mathbb{C}} \subset M'_{\mathbb{C}}$.

Вернёмся теперь снова к комплексному вектору $n \in M'_{\mathbb{C}}$, у которого $n^{\mathrm{Re}} \notin M^{\perp}_{\mathbb{R}}$ и $n^{\mathrm{Im}} \in M^{\perp}_{\mathbb{R}}$. Поскольку мы уже доказали, что $M^{\perp}_{\mathbb{C}} \subset M'_{\mathbb{C}}$, то отсюда следует, что в $M'_{\mathbb{C}}$ содержится и такой вектор, мнимая часть которого равна нулю, а вещественная совпадает с вещественной частью вектора n . Иначе говоря, доказано, что $M'_{\mathbb{C}}$ содержит вещественный вектор, не содержащийся в $M^{\perp}_{\mathbb{R}}$. Но тогда, как следует из леммы пункта 7, $M_{\mathbb{R}} \subset M'_{\mathbb{C}}$, и, следовательно, пространства $M'_{\mathbb{C}}$ и $M_{\mathbb{C}}$ совпадают.

Таким образом, доказана

Л е м м а. *Всякое приводящее подпространство представления $T_{\mathbb{C}}$ либо совпадает со всем пространством $M_{\mathbb{C}}$, либо содержится в $M^{\perp}_{\mathbb{C}}$.*

Из неё вытекает

Т е о р е м а. *Представление $T_{\mathbb{C}}$ неразложимо.*

13. Неразложимость представлений $T^{\perp}_{\mathbb{C}}$, $T^{(+1)}_{\mathbb{C}}$ и $T^{(-1)}_{\mathbb{C}}$. Докажем сначала следующую лемму:

Л е м м а. *Всякое подпредставление представления $T^{\perp}_{\mathbb{C}}$ содержит подпредставление $T^{\|}_{\mathbb{C}}$.*

Чтобы доказать эту лемму, обозначим рассматриваемое подпредставление как $T'_{\mathbb{C}}$. Приводящее подпространство, в котором оно действует, обозначим $M'_{\mathbb{C}}$.

Рассмотрим какой-нибудь ненулевой вектор n из подпространства $M'_{\mathbb{C}}$. Если он лежит в $M^{\|}_{\mathbb{C}}$, то условие леммы выполнено. Предположим теперь, что этот вектор не содержится в $M^{\|}_{\mathbb{C}}$.

Если векторы k , n^{Re} и n^{Im} линейно зависимы, то, согласно лемме из пункта 9, можно без ущерба для общности считать, что $n^{\mathrm{Im}} \in M^{\|}_{\mathbb{R}}$ и $n^{\mathrm{Re}} \notin M^{\|}_{\mathbb{R}}$. Далее, согласно первой лемме из пункта 8, с помощью преобразований малой группы $\mathfrak{L}_k$ можно изменить вектор n^{Re} так, что к нему добавится произвольный вектор из $M^{\|}_{\mathbb{R}}$. Вектор n^{Im} при этом останется неизменным. Следовательно, $M^{\|}_{\mathbb{R}} \subset M'_{\mathbb{C}}$, и, следовательно, $M^{\|}_{\mathbb{C}} \subset M'_{\mathbb{C}}$.

Если же векторы k , n^{Re} и n^{Im} линейно независимы, то, как следует из предложения пункта 8, выбирая подходящим образом преобразование малой группы $\mathfrak{L}_k$, можно добавить к вектору n^{Re} вектор, параллельный k , и оставить при этом неизменным вектор n^{Im} . Следовательно, опять $M^{\|}_{\mathbb{R}} \subset M'_{\mathbb{C}}$, и $M^{\|}_{\mathbb{C}} \subset M'_{\mathbb{C}}$. Таким образом, лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекают две теоремы:

Т е о р е м а. *Представление* $T_{\mathbb{C}}^{\perp}$ *неразложимо.*

Т е о р е м а. *Представления* $T_{\mathbb{C}}^{(+1)}$ *и* $T_{\mathbb{C}}^{(-1)}$ *неразложимы.*

Кроме того, из доказанной леммы и теоремы пункта 6 следует

Т е о р е м а. *У представления* $T_{\mathbb{C}}^{\perp}$ *кроме подпространств* $M_{\mathbb{C}}^{\parallel}$, $M_{\mathbb{C}}^{(+1)}$, $M_{\mathbb{C}}^{(-1)}$ *и самого* $M_{\mathbb{C}}^{\perp}$ *других приводящих подпространств нет.*

Таким образом, у представления $T_{\mathbb{C}}$, кроме (8) и (9), других композиционных рядов нет.

14. Матрицы представлений $T_{\mathbb{R}}$ и $T_{\mathbb{C}}$. Многие из полученных результатов можно наглядно изобразить с помощью шаблонов для матриц представлений $T_{\mathbb{R}}$ и $T_{\mathbb{C}}$. Если в пространствах $M_{\mathbb{R}}$ и $M_{\mathbb{C}}$ выбрать подходящие базисы, то эти шаблоны примут блочно-треугольный вид:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$SO(2)$}} & \cdot \\ 0 & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \boxed{e^{-i\varphi}} & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \boxed{e^{+i\varphi}} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

При этом известно, что на месте каждой точки стоит, вообще говоря, не ноль.

Выяснение того, в каких подпространствах и факторпространствах действуют различные блоки этих матриц, оставляется читателю.

Список литературы

[1] М. А. Наймарк *„Линейные представления группы Лоренца“*, М.: ГИФМЛ (1958).

[2] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро *„Представления группы вращений и группы Лоренца“*, М.: ГИФМЛ (1958).

[3] Ф. И. Фёдоров *„Группа Лоренца“*, М.: Наука (1979).

[4] Л. Райдер *„Квантовая теория поля“*, М.: Мир (1987). [L. H. Ryder *“Quantum field theory”*, Cambridge: Cambridge univ. press (1985).]