О квантовании электромагнитного поля. VI. Квантование.

Д. А. Арбатский*

Март 2002 г.

Аннотация

Описана общая методика квантования линейных полей. Введена концепция квантования, инвариантного по отношению к действию некоторой группы. Явно релятивистски-инвариантно строится пространство квантовых состояний для релятивистских полей. Устанавливается связь с квантованием полевого осциллятора. Обосновывается необходимость использования индефинитного скалярного произведения для электромагнитного поля. Обсуждается дополнительное условие на „физически допустимые" состояния электромагнитного поля. Обсуждаются свойства пространства состояний электромагнитного поля с точки зрения функционального анализа. Рассмотрен вопрос о происхождении антиунитарных преобразований в квантовой теории поля.

1. Другие подходы к квантованию. Прежде чем приступать к описанию конструкции квантованного поля, дадим краткое сравнение нашей конструкции с другими известными подходами к описанию квантовых полей.

- **Метод формальных манипуляций.** Этот метод применялся уже в самых ранних работах по квантовой теории поля. Его суть состоит в том, чтобы вычислять скобки Пуассона классических величин и считать, что для соответствующих квантовых величин коммутаторы вычисляются по формуле:

$$[\hat{a}\,,\,\hat{b}\,] = i\,\{\,a\,,\,b\,\}\widehat{\ }\,. \tag{1}$$

  Приведённая формула, конечно, не может выполняться для всех величин. Тем не менее, если её применять достаточно осторожно, то можно выяснить многие свойства квантованных полей, при этом вообще не уточняя, что они из себя представляют. Этот путь, в действительности, оказался самым продуктивным с точки зрения практических приложений.

  Что касается того, как вычислялись скобки Пуассона, то делалось это таким образом, что усмотреть релятивистскую инвариантность даже в классической теории было очень трудно. Впоследствии, правда, Пайерлс [1] предложил альтернативный способ установления коммутационных соотношений, который был явно релятивистски-инвариантным. Соответствующая классическая скобка, фигурирующая в выражении (1), была даже названа „скобкой Пайерлса". Довольно сложное „физическое" обоснование соотношений (1), используемых при квантовании по методу Пайерлса, имеется в [2].

  Описанный подход нам наиболее близок.

  Относительно классического описания релятивистских полей можно сказать, что инвариантный гамильтонов формализм позволяет определить скобку Пуассона полностью релятивистски инвариантно. При таком подходе понятие скобки Пуассона видоизменяется таким образом, что скобка Пайерлса оказывается её очень частным случаем. Методика практического вычисления скобок Пуассона в инвариантном гамильтоновом формализме была нами описана в статье [I].

  Что касается квантования полей, то в данной статье оно будет произведено *конструктивно*: на основе развитого в [I] инвариантного гамильтонова формализма, используя обычные алгебраические методы, мы построим в этой статье квантованные поля явно.

*http://daarb.narod.ru/ , http://wave.front.ru/

- **Метод ящика.** Этот метод также был популярен в теории поля со времён её зарождения. Он состоит в том, чтобы рассматривать поле не в бесконечном пространстве, а в большом ящике с периодическими граничными условиями. При этом описание поля становится подобно описанию бесконечного количества осцилляторов.

  Введение ящика принципиально разрушает релятивистскую инвариантность, и уже этой причины достаточно, чтобы не рассматривать этот метод здесь в подробностях.

  Однако в результате применения этого метода возникло полезное понятие полевого осциллятора. В этом плане следует заметить, что в нашем методе имеется аналогичное понятие (введённое в статье [IV]). У нас оно вводится несколько более абстрактно, с помощью понятия индуцированного симплектического представления. Только таким путём возможно установить правильную теоретико-групповую природу полевого осциллятора и связать инвариантные квантования поля с инвариантными квантованиями осциллятора.

- **Конструкция Фока и теория Вигнера-Макки.** В работе [3] Фок указал, что пространство состояний квантованного поля устроено как симметризованная тензорная экспонента одночастичного подпространства. Впоследствии Вигнером и Макки был разработан метод поиска всевозможных одночастичных подпространств, основанный на теории индуцированных унитарных представлений группы Пуанкаре (см., например, обзор [5]). Весьма подробное современное изложение этого подхода имеется в книге [7].

  Недостатки этого подхода состоят в следующем. Во-первых, операторы рождения и уничтожения квантов с самого начала вводятся с помощью довольно сложных формул. Во-вторых, даже когда введены такие операторы, требуются весьма запутанные рассуждения, чтобы построить из них локальные операторы *поля*. В-третьих, при таком подходе вообще выпадают из рассмотрения поля с индефинитным скалярным произведением.

  В нашем подходе исходным объектом выступает не одночастичное квантовое подпространство, а классическое поле, описанное на языке инвариантного гамильтонова формализма. При этом второй недостаток автоматически исчезает, т. к. появление полевых операторов у нас происходит сразу же при квантовании.

  Операторы рождения и уничтожения квантов у нас также могут быть введены. При этом формулы для них вытекают из самой алгебраической конструкции квантованного поля, а не постулируются изначально.

  Что касается квантованных полей с индефинитным скалярным произведением, то они у нас возникают столь же естественно, как и поля с положительно-определённым скалярным произведением. Наша схема действительно является более общей, как в этом можно убедиться уже на примере массивного скалярного поля. Благодаря этой общности, схема совершенно естественно включает в себя электромагнитное поле как частный случай.

  Отметим также, что в нашем подходе имеется также и аналог теории Вигнера-Макки. Это теория индуцированных симплектических представлений группы Пуанкаре [IV]. Теория индуцированных симплектических представлений является более богатой, чем теория индуцированных унитарных представлений.

- **Подход в духе теоремы Стоуна-фон Неймана.** В квантовой механике при изучении квантового осциллятора оказывается полезной теорема Стоуна-фон Неймана, утверждающая, что канонические коммутационные соотношения для координат и импульсов однозначно определяют соответствующее неприводимое унитарное представление. Естественно, этот подход пытались перенести на квантовую теорию поля.

  Но теорема Стоуна-фон Неймана на случай квантования систем с бесконечным числом степеней свободы непосредственно не переносится (см., например, [8]). Были проведены большие исследования с целью преодолеть эту трудность. Несмотря на их несомненную ценность, думается всё же, что они оказались слишком оторванными от практических приложений.

  Здесь стоит также отметить, что если отказаться от положительной определённости скалярного произведения в пространстве квантовых состояний, то единственность квантования нарушается уже в случае одномерного гармонического осциллятора. Поэтому наш путь отличается от описанного принципиальным образом: мы отказываемся от требования положительной определённости скалярного произведения, но взамен вводим концепцию инвариантного квантования.

  Отметим здесь также такую деталь. При формулировке теоремы Стоуна-фон Неймана коммутационные соотношения необходимо записывать в форме соотношений Вейля. В нашем же подходе фигурируют коммутационные соотношения для самих неограниченных операторов. При этом сама конструкция квантования строго определяет, в каком смысле их следует понимать.

- **Геометрическое квантование.** Метод геометрического квантования состоит в том, чтобы, опираясь на геометрию классического фазового пространства, построить пространство квантовых состояний как некоторое множество функций на классическом фазовом пространстве (см., например, [9]).

  С точки зрения инвариантного гамильтонова формализма эту схему естественно применять к инвариантному фазовому пространству Z . Заметим однако, что у этого подхода сразу же видны значительные трудности. Во-первых, сделать этот подход математически строгим для случая систем с бесконечным числом степеней свободы совсем не просто. Во-вторых, связь с конструкцией Фока в этом случае осуществляется с помощью не слишком очевидных формул. По этим причинам такой подход оказывается не очень удобен для практических приложений. В-третьих, не ясно, каким образом с помощью этого подхода можно описать случай квантования с индефинитным скалярным произведением: уже в случае одномерного гармонического осциллятора возникают большие трудности с определением индефинитного скалярного произведения.

- **Метод континуального интеграла.** Этот метод стал в последнее время очень популярен в связи с тем, что он будто бы является явно релятивистски-инвариантным. При этом с континуальным интегралом работают фактически как с символической формой записи некоторых выражений.

  Можно, однако, рассматривать континуальный интеграл как строго определённый математический объект (см., например, [10]). Такой подход наталкивается на такие существенные трудности, что ни о какой „очевидной“ релятивистской инвариантности не может быть и речи.

2. Квантование. Опишем теперь, как, имея классическое поле, следует строить поле квантовое.

1. Рассмотрим множество (комплексных) функций, постоянных на всём пространстве Z . Обозначим это множество как $\mathcal{C}$. Рассмотрим далее прямую сумму $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$. Скобка Пуассона превращает эту прямую сумму в комплексную алгебру Ли.

2. Отвлекаясь пока от алгебраической структуры множества $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ и рассматривая все его элементы как совершенно независимые, будем называть это множество *алфавитом* $\mathcal{A}$, а его элементы *буквами*. Договоримся также, что элемент $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$, рассматриваемый как буква алфавита $\mathcal{A}$, будет дополнительно снабжаться „шляпкой“ сверху или сбоку, например: $\hat{a} = a\widehat{\ }$.

3. Можно далее ввести формальное умножение элементов алфавита. А именно, будем считать, что при перемножении (конечного) набора букв образуется *слово*, состоящее из этих букв (порядок следования букв является существенным):

   $$\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_2 \cdot \ldots \cdot \hat{a}_k = \hat{a}_1 \hat{a}_2 \ldots \hat{a}_k \ , \qquad \hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_k \in \mathcal{A} \ .$$

   Слова мы будем также обозначать символами со шляпкой, например: $\hat{w} = w\widehat{\ }$. Множество всех возможных слов обозначим символом $\mathcal{W}$; при этом целесообразно включить сюда и слово нулевой длины, которое можно обозначить как $()\widehat{\ }$. Естественно считать, что и на множестве слов $\mathcal{W}$ действует операция умножения, которая „склеивает“ слова. Таким образом, $\mathcal{A}$ является *системой свободных образующих*, а $\mathcal{W}$ является *свободной полугруппой с единицей* (роль единицы в ней играет специально привнесённый элемент $()\widehat{\ }$).

4. Подобным же образом определим теперь формальную сумму (конечного) набора слов, домноженных на произвольные (комплексные) коэффициенты. А именно, назовём *фразой* формальную запись вида:

   $$\lambda_1 \hat{w}_1 + \lambda_2 \hat{w}_2 + \ldots + \lambda_m \hat{w}_m \ , \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \ , \quad \hat{w}_1, \hat{w}_2, \ldots, \hat{w}_m \in \mathcal{W} \ .$$

   Будем, кроме того, считать две фразы эквивалентными, если для любого слова у них совпадает сумма коэффициентов при этом слове. Множество всех введённых таким образом классов эквивалентности обозначим символом $\mathcal{P}$.

   На множестве фраз $\mathcal{P}$ можно теперь естественным образом ввести операции сложения и умножения на скаляр. А именно, суммой двух фраз называется фраза, получающаяся соединением исходных фраз знаком „ + “. Умножение фразы на число определяется как умножение каждого из коэффициентов на это число. Тем самым $\mathcal{P}$ наделяется естественной структурой комплексного линейного пространства ($\mathcal{P}$ является *свободным* $\mathbb{C}$ *-модулем, порождённым* $\mathcal{W}$).

На множестве фраз $\mathcal{P}$ можно также ввести естественным образом операцию умножения двух элементов. Именно, произведение двух фраз, содержащих по одному слову, определим равенством:

$$(\lambda_1 \hat{w}_1) \cdot (\lambda_2 \hat{w}_2) = (\lambda_1 \lambda_2)\,(\hat{w}_1 \hat{w}_2)\ , \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\ , \quad \hat{w}_1, \hat{w}_2 \in \mathcal{W}\ .$$

На произвольные фразы распространим это определение, исходя из требования дистрибутивности:

$$\hat{p}_1 \cdot (\hat{p}_2 + \hat{p}_3) = \hat{p}_1\hat{p}_2 + \hat{p}_1\hat{p}_3\ , \qquad (\hat{p}_1 + \hat{p}_2) \cdot \hat{p}_3 = \hat{p}_1\hat{p}_3 + \hat{p}_2\hat{p}_3\ , \qquad \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3 \in \mathcal{P}\ .$$

5. Таким образом, множество фраз $\mathcal{P}$ превращается в (ассоциативную) алгебру ($\mathcal{P}$ является *полугрупповой алгеброй полугруппы* $\mathcal{W}$ или *свободной алгеброй над полугруппой* $\mathcal{W}$).

6. До сих пор при построении алгебры $\mathcal{P}$ алфавит $\mathcal{A}$ рассматривался как совершенно произвольное множество. Теперь, используя структуру алгебры Ли в $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ и соответствие между подпространством $\mathcal{C}$ и полем скаляров $\mathbb{C}$, можно дополнительно внести в алгебру $\mathcal{P}$ некоторые *определяющие соотношения.* Это делается с помощью факторизации алгебры $\mathcal{P}$ по подходящему идеалу.

   Именно, рассмотрим все фразы следующих видов:

$$(\lambda\, a)\widehat{\ } - \lambda\, \hat{a}\ ,$$
$$(a + b)\widehat{\ } - (\hat{a} + \hat{b})\ ,$$
$$\{\, a\,,\, b\,\}\widehat{\ } + i\,(\hat{a}\,\hat{b} - \hat{b}\,\hat{a})\ ,$$
$$\hat{1} - (\,)\widehat{\ }\ .$$

   Здесь $\lambda \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$, $\hat{a}, \hat{b} \in \mathcal{A}$. 1 — обозначение для функции, равной 1 на всём инвариантном фазовом пространстве Z , т. е. $1 \in \mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$; $\hat{1}$ — соответствующий ей элемент алфавита, $\hat{1} \in \mathcal{A}$.

   Натянем на указанные фразы двусторонний идеал, т. е. присоединим к ним те фразы, которые получаются из указанных путём применения конечного числа операций умножения на скаляр, сложения и умножения (слева и справа) на произвольные фразы. Факторизуя алгебру $\mathcal{P}$ по построенному идеалу получаем алгебру, которую мы будем называть *алгеброй операторов* и обозначать $\mathcal{O}$. Элементы этой алгебры называются *операторами* и обозначаются так же, как и соответствующие им фразы.

   Проведённая факторизация приводит к тому, что в алгебре операторов выполняются определяющие соотношения:

$$(\lambda\, a)\widehat{\ } = \lambda\, \hat{a}\ ,$$
$$(a + b)\widehat{\ } = \hat{a} + \hat{b}\ ,$$
$$\{\, a\,,\, b\,\}\widehat{\ } = -\,i\,[\,\hat{a}\,,\, \hat{b}\,]\ ,$$
$$\hat{1} = (\,)\widehat{\ }\ .$$

   В третьем соотношении использовано стандартное обозначение для *коммутатора* двух операторов: $[\,\hat{a}\,,\,\hat{b}\,] = \hat{a}\,\hat{b} - \hat{b}\,\hat{a}$.

   Четвёртое соотношение, в частности, позволяет отказаться от громоздкого обозначения $(\,)\widehat{\ }$, когда речь идёт об операторе, и писать всегда $\hat{1}$.

7. Введём теперь операцию *сопряжения.* Эта операция будет всегда обозначаться символом * , независимо от того, к какого рода объекту она применяется.

   Под сопряжением комплексного числа будем понимать обычное комплексное сопряжение.

   Элементы пространства $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ являются функциями на Z . Под сопряжением, применённым к такой функции, будем понимать переход к функции с комплексно-сопряжёнными значениями. Очевидно, в результате также получается элемент пространства $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$. Более того, поскольку скобка Пуассона в $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ является комплексификацией вещественной скобки Пуассона, выполняется равенство:

$$\{\, a^*\,,\, b^*\,\} = \{\, a\,,\, b\,\}^*\ . \tag{2}$$

   Определение сопряжения естественно переносится на элементы алфавита $\mathcal{A}$:

$$(\hat{a})^* = (a^*)\widehat{\ }\ .$$

   На слова и на фразы операция сопряжения распространяется по правилам:

$$(\hat{a}\,\hat{b})^* = \hat{b}^*\,\hat{a}^*\ , \qquad (\lambda\,\hat{a})^* = \lambda^*\,\hat{a}^*\ , \qquad (\hat{a} + \hat{b})^* = \hat{a}^* + \hat{b}^*\ .$$

   Здесь $\hat{a}$ и $\hat{b}$ могут быть буквами, словами и фразами; λ — комплексное число.

   Очевидно, операция сопряжения корректно переносится с фраз на операторы.

8. Рассмотрим теперь пространство $Z^*_{\mathbb{C}}$. Разобьём его в прямую сумму двух подпространств:

$$Z^*_{\mathbb{C}} = Cr \oplus De \ .$$

От подпространств Cr и De потребуем, во-первых, чтобы они переходили друг в друга при сопряжении:

$$Cr^* = De \ . \tag{3}$$

Во-вторых, потребуем, чтобы скобка Пуассона на этих подпространствах зануляласьˆ[1]:

$$\{ \, a \, , \, b \, \} = 0 \ , \qquad a, b \in Cr \ ;$$

$$\{ \, a \, , \, b \, \} = 0 \ , \qquad a, b \in De \ .$$

Подпространство Cr будем называть *рождающим*, а De — *уничтожающим.* В соответствии с приведённой выше конструкцией, подпространствам Cr и De соответствуют некоторые подпространства в алгебре операторов; обозначим эти подпространства $Cr^\frown$ и $De^\frown$, соответственно.

Введём также обозначение $\mathcal{C}^\frown$ для подпространства алгебры операторов, отвечающего подпространству $\mathcal{C}$ алгебры Ли $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$.

9. Натянем теперь на подпространство $De^\frown$ левый идеал, т. е. присоединим к имеющимся там операторам те операторы, которые получаются из указанных в результате конечного числа операций умножения на скаляр, сложения и домножения слева на произвольные элементы алгебры $\mathcal{O}$.

   Факторизуем теперь алгебру $\mathcal{O}$ по построенному левому идеалу. В результате получится некоторое линейное пространство. Оно не является алгеброй, но является левым модулем, т. е. на нём естественно определено действие операторов слева. Элементы этого факторпространства называются *кет-векторами.* Кет-векторы обозначаются символами вида $| \, x \, \rangle$, где x — любой значок, отличающий данный кет-вектор. Само пространство кет-векторов обозначается $\mathcal{H}$ и называется *пространством состояний* квантованного поля.

10. Можно провести те же самые построения с сопряжёнными объектами, т. е. вместо подпространства $De^\frown$ рассмотреть подпространство $Cr^\frown$, натянуть на него правый идеал вместо левого, и, факторизуя, получить правый модуль вместо левого. Элементы этого модуля называются *бра-векторами.* Сам же модуль будем, если это не вызывает недоразумений, также называть *пространством состояний* квантованного поля и обозначать $\mathcal{H}$.

    Бра-векторы обозначаются символами вида $\langle \, x \, |$. Операция сопряжения естественным образом переносится на кет- и бра-векторы и устанавливает между ними взаимно-однозначное соответствие. Говорят, что соответствующие друг другу кет- и бра-вектор относятся к одному и тому же состоянию квантованного поля.

11. При факторизации алгебры операторов $\mathcal{O}$ и переходе к пространствам кет- и бра-векторов, оператор $\hat{1}$ переходит в некоторый кет-вектор $| \, 0 \, \rangle$ и бра-вектор $\langle \, 0 \, |$, соответственно. Эти кет- и бра-векторы описывают состояние, называемое *вакуумом.*

12. Введём теперь так называемое *скалярное произведение* бра- и кет- векторов. Для произвольных бра-вектора $\langle \, x \, |$ и кет-вектора $| \, y \, \rangle$ это произведение записывается как $\langle \, x \, | \cdot | \, y \, \rangle$, или, для краткости, $\langle \, x \, | \, y \, \rangle$. В результате образуется комплексное число, т. е. $\langle \, x \, | \, y \, \rangle \in \mathbb{C}$.

    Потребуем, чтобы операция скалярного произведения обладала следующими свойствами:

$$\langle \, 0 \, | \, 0 \, \rangle = 1 \ ,$$

$$\big(\lambda \, \langle \, x \, | \big) \cdot | \, y \, \rangle = \lambda \cdot \langle \, x \, | \, y \, \rangle \ , \qquad \big(\langle \, x_1 \, | + \langle \, x_2 \, | \big) \cdot | \, y \, \rangle = \langle \, x_1 \, | \, y \, \rangle + \langle \, x_2 \, | \, y \, \rangle \ ,$$

$$\langle \, x \, | \cdot \big(\lambda \, | \, y \, \rangle \big) = \lambda \cdot \langle \, x \, | \, y \, \rangle \ , \qquad \langle \, x \, | \cdot \big(| \, y_1 \, \rangle + | \, y_2 \, \rangle \big) = \langle \, x \, | \, y_1 \, \rangle + \langle \, x \, | \, y_2 \, \rangle \ ,$$

$$\big(\langle \, x \, | \, \hat{o} \big) \cdot | \, y \, \rangle = \langle \, x \, | \cdot \big(\hat{o} \, | \, y \, \rangle \big) \ .$$

    В последнем равенстве $\hat{o} \in \mathcal{O}$; это свойство позволяет писать в таких случаях просто: $\langle \, x \, | \, \hat{o} \, | \, y \, \rangle$.

    Указанные свойства для скалярного произведения являются определяющими, т. е. существует не более одного скалярного произведения, обладающего указанными свойствами.

[1] С учётом (2) и (3), достаточно потребовать зануления только на одном из этих двух подпространств.

13. Скалярное произведение является эрмитовой формой в $\mathcal{H}$, т. е. всегда $\langle\, x \,|\, y \,\rangle = (\langle\, y \,|\, x \,\rangle)^*$. Если скалярное произведение окажется к тому же положительно-определённым, то оно задаёт в $\mathcal{H}$ некоторую топологию. Если $\mathcal{H}$ относительно этой топологии пополнить, то оно превращается в обычное гильбертово пространство. Операторы при этом оказываются заданными на соответствующем плотном линейном многообразии в $\mathcal{H}$.

    Однако, скалярное произведение может вовсе и не быть положительно-определённым: это зависит от скобки Пуассона в $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ и выбора подпространств Cr и De . Вопрос об определении топологии в этом случае на примере электромагнитного поля будет обсуждаться в пункте 10.

Итак, в этом пункте было описано, как по алгебре Ли $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ наблюдаемых классического поля строятся алгебра $\mathcal{O}$ операторов квантового поля и пространство состояний $\mathcal{H}$. Это построение называется *квантованием* классического поля.

3. Градуировка алгебры $\mathcal{O}$ и пространства $\mathcal{H}$. Связь с конструкцией Фока. Рассмотрим теперь в алгебре операторов подпространства $\widehat{\mathcal{C}}$, $\widehat{Cr}$ и $\widehat{De}$. Будем говорить, что они являются подпространствами *степени* 0 , $+1$ и -1 , соответственно. Далее, образуя всевозможные произведения этих операторов, присвоим каждому такому произведению степень, равную сумме степеней сомножителей. Если два произведения имеют одну и ту же степень, то припишем ту же степень их сумме. Нетрудно видеть, что таким образом алгебра операторов, рассматриваемая как линейное пространство, может быть представлена в виде суммы своих линейных подпространств, отвечающих разным степеням:

$$\mathcal{O} = \ldots \oplus \mathcal{O}_{-2} \oplus \mathcal{O}_{-1} \oplus \mathcal{O}_0 \oplus \mathcal{O}_{+1} \oplus \mathcal{O}_{+2} \oplus \ldots$$

При этом, если $\hat{a} \in \mathcal{O}_i$ и $\hat{b} \in \mathcal{O}_j$, то $\hat{a}\,\hat{b} \in \mathcal{O}_{i+j}$. Короче говоря, алгебра $\mathcal{O}$ является градуированной.

Эта градуировка естественным образом переносится на пространство состояний $\mathcal{H}$. При этом отрицательным степеням в пространстве $\mathcal{H}$ отвечают тривиальные подпространства. Иначе говоря, пространство состояний $\mathcal{H}$ является положительно-градуированным:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots \tag{4}$$

Если кет-вектор принадлежит одному из пространств $\mathcal{H}_n$, то говорят, что в данном состоянии имеется n частиц.

Очевидно также, что всё проведённое построение имеет место и для сопряжённых объектов, и разложение (4) точно так же выглядит и для бра-векторов.

Нелишне также отметить, что согласно введённому определению, число частиц всегда неотрицательно, независимо от того, является ли скалярное произведение в $\mathcal{H}$ положительно-определённым.

Далее, легко видеть, что подпространства $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{H}_j$ ортогональны относительно скалярного произведения. Иначе говоря, если $\langle\, a \,| \in \mathcal{H}_i$ и $|\, b \,\rangle \in \mathcal{H}_j$ и $i \neq j$, то $\langle\, a \,|\, b \,\rangle = 0$. Имея это в виду, разложение (4) можно писать в виде:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \dot{+} \mathcal{H}_1 \dot{+} \mathcal{H}_2 \dot{+} \ldots \tag{5}$$

В случае, когда скалярное произведение является положительно-определённым, разложение (5) позволяет установить связь с обычной конструкцией Фока [3]. Поскольку это довольно просто, мы не станем прослеживать эту связь здесь более подробно.

4. Инвариантное квантование. В пункте 2 квантование классического поля было описано во „внутренних“ терминах инвариантного гамильтонова формализма. Однако, для выбора подпространств Cr и De не было предложено никакого конкретного рецепта: были лишь указаны некоторые необходимые условия выбора этих подпространств. На практике это приводит к тому, что у одного и того же классического поля квантований может оказаться слишком много.

Пусть теперь в пространстве $Z^*_{\mathbb{C}}$ определено линейное симплектическое представление некоторой группы. Определим тогда *инвариантное квантование* требованием, чтобы подпространства Cr и De были инвариантными по отношению к действию данной группы. Иными словами, Cr и De — приводящие подпространства указанного представления.

Когда речь идёт о релятивистских полях, в качестве основной группы инвариантности выступает группа Пуанкаре $\mathcal{P}$. Квантование, инвариантное по отношению к группе Пуанкаре, будем для краткости называть

$\mathcal{P}$ -инвариантным. В статье [IV] мы уже видели, каким образом группа Пуанкаре действует в пространстве $Z^*_{\mathbb{C}}$, и как приводятся её представления.

Квантование релятивистских полей мы рассмотрим чуть позже, а сейчас обсудим квантование гармонического осциллятора. Его группа симметрии — это просто однопараметрическая группа временных сдвигов.

5. Квантование гармонического осциллятора. Рассмотрим гармонический осциллятор. Он описывается лагранжианом:

$$L = \tfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \tfrac{m^2}{2}\varphi^2 \ . \qquad (6)$$

Здесь $\varphi(x)$ — вещественная функция одного вещественного аргумента (времени).

Уравнение движения имеет вид:

$$(\partial^2 + m^2)\,\varphi = 0 \ .$$

Инвариантное фазовое пространство Z — двумерное вещественное пространство. Симплектическая структура задаётся на нём формулой:

$$\omega = \dot{\varphi}(t) \wedge \varphi(t) \ .$$

Здесь формы $\dot{\varphi}$ и φ берутся в один и тот же произвольный момент времени t .

Поскольку лагранжиан (6) инвариантен относительно временных сдвигов, в пространстве Z действует представление аддитивной группы $\mathbb{R}$. Полевое представление $Z^*_{\mathbb{C}}$ в данном случае, так же как и у релятивистских полей, распадается в прямую сумму положительно- и отрицательно-частотного:

$$Z^*_{\mathbb{C}} = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}} \oplus Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}} \ .$$

В качестве приводящего базиса возьмём следующие два элемента:

$$a = \tfrac{1}{\sqrt{2m}}\,(m\varphi(0) + i\dot{\varphi}(0)) \ , \qquad a^* = \tfrac{1}{\sqrt{2m}}\,(m\varphi(0) - i\dot{\varphi}(0)) \ .$$

Действительно, поскольку имеет место разложение $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}}(a\,e^{-imt} + a^* e^{+imt})$, получаем, что $a \in Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$, $a^* \in Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$.

Симплектическая структура через формы a и a^* может быть записана следующим образом:

$$\omega = i\,a^* \wedge a \ .$$

Скобка Пуассона соответствующих линейных функций равна:

$$\{\,a\,,\,a^*\,\} = -i \ .$$

Таким образом, в соответствии со сказанным в пункте 4, имеются ровно два инвариантных квантования: либо $Cr = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$ и $De = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$, либо $Cr = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$ и $De = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$. Легко видеть, что первое квантование приводит к положительно-определённому скалярному произведению. При втором квантовании скалярное произведение оказывается индефинитным. Причём в разложении (5) на подпространствах с чётным числом частиц скалярное произведение определено положительно, а на подпространствах с нечётным — отрицательно.

6. Связь инвариантных квантований поля и полевого осциллятора. Полевой осциллятор, как конечномерную систему, удобнее исследовать алгебраическими средствами. С другой стороны, между квантованием поля и квантованием осциллятора имеется тесная связь.

В самом деле, легко видеть, что выбор $\mathbb{R} \times \mathcal{L}_{k^{(0)}}$ -инвариантных рождающих и уничтожающих подпространств у осциллятора и выбор $\mathcal{P}$ -инвариантных рождающих и уничтожающих подпространств у поля связаны операцией индуцирования. Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие между $\mathbb{R} \times \mathcal{L}_{k^{(0)}}$ -инвариантными квантованиями осциллятора и $\mathcal{P}$ -инвариантными квантованиями поля.

Более того, у соответственных квантований осциллятора и поля скалярные произведения в пространствах состояний либо одновременно положительно-определённы, либо одновременно индефинитны. Таким образом, возникает удобный критерий знакоопределённости скалярного произведения.

7. Квантование скалярного поля. В статье [IV] было показано, что по отношению к действию группы Пуанкаре пространство линейных наблюдаемых скалярного поля $Z^*_{\mathbb{C}}$ распадается в прямую сумму двух неприводимых подпространств: $Z^*_{\mathbb{C}} = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}} \oplus Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$. Таким образом, имеется ровно две возможности: либо положить $Cr = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$ и $De = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$, либо $Cr = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$ и $De = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$. Согласно вычисленным в статье [IV] формулам для скобок Пуассона соответствующих функций, оба разбиения удовлетворяет всем требованиям пункта 2.

Таким образом, скалярное поле допускает ровно два $\mathcal{P}$ -инвариантных квантования. Полевой осциллятор в данном случае — обычный одномерный вещественный осциллятор. Используя результаты пункта 5 и критерий из пункта 6, получаем, что при первом квантовании скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}$ оказывается положительно-определённым, а при втором - индефинитным.

Первое квантование фактически является общепринятым. Не следует думать, однако, что квантование с индефинитной метрикой заведомо бессмысленно, т. к. оно приводит к „отрицательным вероятностям“. В принципе, нельзя исключать полезности такой теории, в которой состояния рассеяния данного поля будут составлять подпространство, на котором скалярное произведение будет положительно-определённым.

8. Квантование электромагнитного поля. Рассмотрим теперь квантование электромагнитного поля. Здесь под электромагнитным полем будет пониматься „нефизическое“ электромагнитное поле [I].

Как было разъяснено в статье [IV], по отношению к действию группы Пуанкаре $\mathcal{P}$ пространство $Z^*_{\mathbb{C}}$ в этом случае, как и в случае скалярного поля, распадается в прямую сумму двух неразложимых подпространств. Поэтому, как и в случае скалярного поля, есть ровно две возможности: либо $Cr = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$ и $De = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$, либо $Cr = Z^{*\,(+)}_{\mathbb{C}}$ и $De = Z^{*\,(-)}_{\mathbb{C}}$.

Используя критерий из пункта 6, легко убеждаемся, что оба квантования приводят к индефинитной метрике. Далее мы будем рассматривать только первое из двух указанных квантований, поскольку именно оно имеет полезную физическую интерпретацию.

Индефинитность скалярного произведения, разумеется, порождает трудности с вероятностной интерпретацией.

В статье [I] было указано, что состояния рассеяния классического электромагнитного поля удовлетворяют дополнительному условию — условию Лоренца. Естественно предположить, что в квантовой теории имеется аналог этого условия. При этом хочется особо подчеркнуть, что это условие должно появляться в квантовой теории не как новый постулат: оно должно выводиться из динамических законов так же, как это мы проделали для классического поля. К сожалению, удовлетворительной теории взаимодействующих полей у нас пока нет. По этой причине никакого вывода здесь дано не будет[2]. Искомое условие имеет вид:

$$- \, i \, k_\mu \, \hat{a}^{(+)}_\mu(k) \, | \, \mathrm{rad} \, \rangle = 0 \ . \tag{7}$$

То есть вектор состояния излучённого поля удовлетворяет указанному равенству для любого k .

Приведённое условие выглядит точно так же, как и один из вариантов этого условия в классической теории. Следует, однако, отметить, что его нельзя записать как $- \, i \, k_\mu \, \hat{a}^{(-)}_\mu(k) \, | \, \mathrm{rad} \, \rangle = 0$ или как $- \, i \, k_\mu \, \hat{a}_\mu(k) \, | \, \mathrm{rad} \, \rangle = 0$, ибо даже вакуум таким условиям не удовлетворяет[3].

---

[2] Формальная выкладка, конечно, имелась ещё в [11]. Кроме того, можно было бы апеллировать к правилам Фейнмана, но эти правила сами нуждаются в обосновании с позиций нашей статьи.

[3] В координатном представлении условие $- \, i \, k_\mu \, \hat{a}_\mu(k) \, | \, \mathrm{rad} \, \rangle = 0$ записывается как $\partial_\mu \hat{A}_\mu(x) \, | \, \mathrm{rad} \, \rangle = 0$. В литературе и по сей день нет единства мнений по поводу того, можно ли дополнительное условие таким образом формулировать. В таком виде, исходя из аналогии с классической теорией, его формулировал ещё Ферми. В работах [12, 13] было указано, что такое дополнительное условие ведёт к трудностям с нормируемостью состояний в квантовом случае. И в работе [14] оно было заменено на $\partial_\mu \, \hat{A}^{(+)}_\mu(x) \, | \, \mathrm{rad} \, \rangle = 0$. В дальнейшем в литературе одни авторы использовали условие $\partial_\mu \, \hat{A}_\mu(x) \, | \, \mathrm{rad} \, \rangle = 0$ [15, 16, 17]. Другие [18] указывали, что такое условие на векторы состояния накладывать нельзя, т. к. при этом возникает противоречие с коммутационными соотношениями. Третьи [19] утверждали, что такое условие можно использовать, но при этом следует проявлять осторожность, поскольку допустимые векторы состояния оказываются ненормируемыми. Эти расхождения во мнениях имеют под собой довольно глубокие причины:

1. В термин „квантование“ обычно не вкладывался никакой точный математический смысл. Фактически, квантованное электромагнитное поле исследовалось путём формальных манипуляций с алгебраическими символами, но при этом не давалось никакого конструктивного определения этого объекта. В такой ситуации дополнительное условие в любом его виде не свободно от критики.

2. Отсутствует удовлетворительная формулировка теории взаимодействующих полей (хотя бы в рамках теории возмущений). Правила Фейнмана при этом не имеют достаточно ясной связи с операторным формализмом, и операторный формализм оказывается оторванным от практических вычислений (прежде всего от теории рассеяния).

Сейчас мы покажем, что условие (7) обеспечивает положительность скалярного произведения.

9. Положительность скалярного произведения у электромагнитного поля. [4] Рассмотрим полевой осциллятор электромагнитного поля. Будем здесь писать для краткости a_μ вместо $\hat{a}_\mu(+1)$ и a^*_μ вместо $\hat{a}_\mu(-1)$. Эти операторы удовлетворяют соотношениям:

$$[\, a^*_\mu \,, \, a_\nu \,] = g_{\mu\nu}, \qquad [\, a^*_\mu \,, \, a^*_\nu \,] = 0, \qquad [\, a_\mu \,, \, a_\nu \,] = 0 \; .$$

Для интересующего нас квантования также выполняется:

$$a_\mu \, | \, 0 \, \rangle = 0 \; .$$

Дополнительное условие выглядит так:

$$k^{(0)}_\mu a_\mu \, | \, \mathrm{rad} \, \rangle = 0 \; , \tag{8}$$

где $k^{(0)}_\mu$ — фиксированный вектор на световом конусе. Подпространство векторов состояния, удовлетворяющих данному условию, мы обозначим $\mathcal{H}^{\mathrm{rad}}$.

Поскольку оператор $k^{(0)}_\mu a_\mu$ имеет определённую градуировку (его степень равна -1), градуировка пространства состояний $\mathcal{H}$ переносится на подпространство $\mathcal{H}^{\mathrm{rad}}$:

$$\mathcal{H}^{\mathrm{rad}} = \mathcal{H}^{\mathrm{rad}}_0 \dot{+} \mathcal{H}^{\mathrm{rad}}_1 \dot{+} \mathcal{H}^{\mathrm{rad}}_2 \dot{+} \ldots \tag{9}$$

Иначе говоря, подпространство, выделяемое дополнительным условием (8), также распадается в ортогональную сумму состояний с определённым числом частиц.

Поскольку сумма (9) ортогональная, неотрицательность скалярного произведения достаточно доказать для каждого из подпространств $\mathcal{H}^{\mathrm{rad}}_n$.

Произвольный вектор состояния $| \, n \, \rangle$ из подпространства $\mathcal{H}^{\mathrm{rad}}_n$ можно представить в виде:

$$| \, n \, \rangle = T_{\mu\nu\ldots\rho} \, a^*_\mu \, a^*_\nu \ldots a^*_\rho \, | \, 0 \, \rangle \; ,$$

где $T_{\mu\nu\ldots\rho}$ — n -валентный тензор. Этот тензор можно без ущерба для общности считать симметричным.

При этом условие (8) для вектора $| \, n \, \rangle$ оказывается дополнительным условием на тензор $T_{\mu\nu\ldots\rho}$:

$$k^{(0)}_\mu T_{\mu\nu\ldots\rho} = 0 \; . \tag{10}$$

Скалярное произведение же вектора $| \, n \, \rangle$ самого на себя равняется:

$$\langle \, n \, | \, n \, \rangle = (-1)^n \, n! \cdot T^*_{\mu\nu\ldots\rho} \, T_{\mu\nu\ldots\rho} \; . \tag{11}$$

Величина $(-1)^n \, n! \cdot T^*_{\mu\nu\ldots\rho} \, T_{\mu\nu\ldots\rho}$ является суммой положительных вещественных чисел, часть из которых входит в сумму со знаком „плюс“, а часть со знаком „минус“. Этот знак определяется релятивистским правилом суммирования по повторяющимся индексам и множителем $(-1)^n$. Покажем, что эта сумма неотрицательна при условии (10).

Поскольку конструкция пространства состояний инвариантна по отношению к выбору вектора $k^{(0)}_\mu$, этот вектор можно принять равным:

$$k^{(0)}_\mu = \begin{pmatrix} k_0 \mid 0 & 0 & k_0 \end{pmatrix}_\mu \; . \tag{12}$$

Что касается первого замечания, то я полагаю, соотношение $\partial_\mu \, \hat{A}_\mu(x) \, | \, \mathrm{rad} \, \rangle = 0$ напрямую не противоречит коммутационным соотношениям. Можно лишь сказать, что конструкция квантования, изложенная в этой статье, с таким условием плохо увязывается.

Второе замечание, несомненно, является более существенным. При рассмотрении динамики классического электромагнитного поля мы указали, что дополнительное условие на состояния рассеяния автоматически вытекает из динамики, а вовсе не является произвольным постулатом. Также была ясно показана роль „нефизических“ степеней свободы. И хотя мы в данной статье так и не формулируем теории квантованных взаимодействующих полей, всё же соображения, основанные на аналогии с классической теорией, дают основания думать, что построение теории рассеяния с условием $\partial_\mu \, A_\mu(x) \, | \, \mathrm{rad} \, \rangle = 0$ — дело малореалистическое.

[4] Материал данного пункта не имеет никакой глубокой связи ни с конструктивностью квантования, ни с алгебраическими, ни с топологическими вопросами, обсуждаемыми в настоящих статьях. Единственная причина, по которой здесь обсуждается этот старый (и очень простой) вопрос состоит в том, что во всех известных мне источниках приводится ошибочное доказательство (при этом почему-то считают, что из положительности квадратичной формы на векторах некоторого базиса вытекает и положительность формы вообще).

Рассмотрим теперь в сумме (11) все слагаемые вида $(-1)^n\, n! \cdot T^*_{0\nu\ldots\rho}\, T_{0\nu\ldots\rho}$. В силу (10) и (12), они полностью сокращаются со слагаемыми вида $(-1)^n\, n! \cdot T^*_{3\nu\ldots\rho}\, T_{3\nu\ldots\rho}$.

Среди оставшихся слагаемых рассмотрим слагаемые вида $(-1)^n\, n! \cdot T^*_{\mu 0\ldots\rho}\, T_{\mu 0\ldots\rho}$. Они полностью сократятся с оставшимися слагаемыми вида $(-1)^n\, n! \cdot T^*_{\mu 3\ldots\rho}\, T_{\mu 3\ldots\rho}$.

И так далее. В результате в сумме (11) останутся лишь слагаемые, индексы которых равны 1 или 2 . Все эти слагаемые входят в сумму (11) со знаком „плюс“.

10. Топология и полнота инвариантного фазового пространства электромагнитного поля. При изучении инвариантного гамильтонова формализма в инвариантное фазовое пространство Z мы вначале включили лишь решения уравнений движения, гладкие в координатном представлении и финитные в пространственном направлении. Вопрос же о том, какой в действительности топологией следует наделять пространство Z вообще не обсуждался. При этом фактически не давалось и точного определения пространства Z^* ; не уточнялось, каким же в точности образом оказываются изоморфными функциональные пространства Z и Z^* ; точное определение скобок Пуассона на Z^* также не давалось. В этом пункте мы покажем, что в пространстве Z можно ввести такую топологию (и пополнить его относительно этой топологии), что оно станет очень похожим на гильбертово пространство. При этом все необходимые для инвариантного гамильтонова формализма свойства у такой топологии будут выполняться.

Симплектическая структура сама по себе не задаёт топологии. Однако, между элементами классического фазового пространства Z и одночастичными состояниями квантованного поля существует взаимнооднозначное соответствие:

$$\underline{c} \;\longleftrightarrow\; (I^{-1}\underline{c})\widehat{\ }\,|\,0\,\rangle\ . \tag{13}$$

Рассмотрим теперь для примера скалярное поле. Среди его инвариантных квантований присутствует квантование с положительно-определённым скалярным произведением. Соответствие (13), во-первых, наделяет пространство Z комплексной структурой, а во-вторых, переносит туда скалярное произведение из одночастичного квантового пространства $\mathcal{H}_1$. Таким образом, Z имеет естественную структуру комплексного гильбертова пространства[5].

Симплектическая структура оказывается непрерывной по паре своих аргументов относительно полученной топологии; симплектическая структура задаёт изоморфизм пространств Z и Z^* ; скобки Пуассона корректно определяются на всём Z^* .

Представим теперь скалярное поле в фурье-представлении в виде:

$$\widetilde{\varphi}(k) = 2\pi\,\delta(k^2 - m^2)\cdot a(k)\ .$$

Соответствие (13) можно записать более явно так:

$$\underline{c} \;\longleftrightarrow\; \int d\mu^+_m \cdot i\,a(k)^{\,\underline{c}} \cdot \hat{a}^*(k)\ |\,0\,\rangle\ , \qquad \text{где}\ \ d\mu^+_m = \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\cdot 2\pi\,\delta(k^2-m^2)\cdot\theta(k)\ .$$

И скалярное произведение в пространстве Z принимает вид:

$$\langle\,\underline{c}\,,\,\underline{d}\,\rangle = \int d\mu^+_m \cdot a^*(k)^{\,\underline{c}} \cdot a(k)^{\,\underline{d}}\ . \tag{14}$$

Буквальное перенесение этой схемы на случай электромагнитного поля не представляется возможным, поскольку, как мы видели, среди $\mathcal{P}$ -инвариантных квантований электромагнитного поля отсутствуют квантования с положительно-определённым скалярным произведением.

Здесь имеется, однако, другая возможность. Представим электромагнитное поле также в фурье-представлении как

$$\widetilde{A}_\mu(k) = 2\pi\,\delta(k^2)\cdot a_\mu(k)\ .$$

По аналогии с формулой (14) введём в классическом фазовом пространстве Z электромагнитного поля скалярное произведение по формуле:

$$\langle\,\underline{c}\,,\,\underline{d}\,\rangle = \int d\mu^+_m \cdot M_{\nu\rho}\cdot a^*_\nu(k)^{\,\underline{c}} \cdot a_\rho(k)^{\,\underline{d}}\ . \tag{15}$$

[5] Полученная топология пространства Z является самой естественной с точки зрения квантования. Бор и Розенфельд [20] заметили, что при рассмотрении квантованного электромагнитного поля необходимо производить усреднение поля по небольшому пространственно-временному объёму: символ $\hat{A}_\mu(x)$ при этом сам по себе физической величиной не является. Проведённое нами рассмотрение показывает, что это утверждение точно так же справедливо и для классического поля, если его фазовое пространство наделяется „правильной“ топологией.

Здесь $M_{\nu\rho}$ — произвольная положительно-определённая эрмитова матрица. В качестве такой матрицы можно взять, например, $M_{\nu\rho} = \mathrm{diag}\,(+1,+1,+1,+1)_{\nu\rho}$.

Скалярное произведение (15) является положительно-определённым. Поэтому оно определяет некоторую топологию в пространстве Z . Важным является то обстоятельство, что эта топология не зависит от конкретного выбора матрицы $M_{\nu\rho}$.

Отсюда следует, что указанная топология является релятивистски-инвариантной.

Относительно введённой топологии симплектическая структура оказывается непрерывной по паре своих аргументов; симплектическая структура задаёт изоморфизм пространств Z и Z^* ; скобки Пуассона корректно определяются на всём Z^* .

Таким образом, инвариантное фазовое пространство электромагнитного поля обладает естественной структурой линейного комплексного топологического пространства, причём топология в нём задаётся множеством эквивалентных (в смысле топологии) скалярных произведений. Такие пространства мы назовём *пространствами гильбертова типа.*

11. Тензорное произведение пространств гильбертова типа. Сейчас мы покажем, что тензорное произведение пространств гильбертова типа само является пространством гильбертова типа.

Рассмотрим два таких пространства X и Y . Их тензорное произведение (точнее, алгебраическое тензорное произведение) определяется следующим образом.

Рассмотрим все формальные произведения вида $x \diamond y$, где $x \in X$ и $y \in Y$. Мы будем называть такие произведения парами. Будем также считать, что пары можно формально умножать на комплексные числа, образуя при этом выражения вида: $\lambda \cdot x \diamond y$. И рассмотрим все формальные суммы вида:

$$\lambda_1 \cdot x_1 \diamond y_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \diamond y_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n \diamond y_n \ .$$

Две такие суммы мы будем считать эквивалентными, если у них для любой пары совпадает сумма коэффициентов при этой паре. Таким образом, приходим к комплексному векторному пространству, которое мы обозначим как $X \diamond Y$ (это — *свободный* $\mathbb{C}$ *-модуль, порождённый декартовым произведением* $X \times Y$).

В получившемся пространстве рассмотрим элементы вида:

$$1 \cdot (\lambda x) \diamond y - \lambda \cdot x \diamond y \ ,$$

$$1 \cdot x \diamond (\lambda y) - \lambda \cdot x \diamond y \ ,$$

$$1 \cdot (x_1 + x_2) \diamond y - 1 \cdot x_1 \diamond y - 1 \cdot x_2 \diamond y \ ,$$

$$1 \cdot x \diamond (y_1 + y_2) - 1 \cdot x \diamond y_1 - 1 \cdot x \diamond y_2 \ .$$

Линейную оболочку указанных элементов обозначим $X \circ Y$.

Факторизуя $X \diamond Y$ по $X \circ Y$, приходим к тензорному произведению:

$$X \otimes Y = (X \diamond Y)/(X \circ Y) \ .$$

Введём также для краткости обозначение $x \otimes y$. Именно, будем считать, что при указанной факторизации элемент $1 \cdot x \diamond y$ пространства $X \diamond Y$ переходит в элемент $x \otimes y$ пространства $X \otimes Y$.

Если X и Y — обычные гильбертовы пространства, то, как известно, их тензорное произведение $X \otimes Y$ обладает естественной структурой гильбертова пространства. Скалярное произведение в $X \otimes Y$ при этом определяется вначале для пар по формуле:

$$\langle\, x_1 \otimes y_1 \,,\, x_2 \otimes y_2 \,\rangle_{X \otimes Y} = \langle\, x_1 \,,\, x_2 \,\rangle_X \cdot \langle\, y_1 \,,\, y_2 \,\rangle_Y \ , \tag{16}$$

а на остальные элементы переносится, исходя из требования линейности по второму аргументу и антилинейности по первому. Пополняя $X \otimes Y$ относительно указанного скалярного произведения, приходим к гильбертову пространству.

В случае пространств гильбертова типа каждое из пространств X и Y обладает многими эквивалентными скалярными произведениями. Пространство $X \otimes Y$ при этом, согласно указанной схеме, наделяется многими скалярными произведениями. Покажем, что все эти скалярные произведения эквивалентны.

Итак, пусть в одном из двух пространств, например в X , мы переходим от скалярного произведения $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_X$ к эквивалентному скалярному произведению $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_X$. При этом скалярное произведение $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{X \otimes Y}$ в пространстве $X \otimes Y$ заменяется на $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{X \otimes Y}$.

Рассмотрим какой-нибудь элемент пространства $X \otimes Y$:

$$z = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \ldots + x_n \otimes y_n \ .$$

Легко видеть, что этот элемент может быть приведён к такому виду, что в этой сумме все $y_1, y_2, \ldots, y_n$ будут ортогональны друг другу относительно скалярного произведения в Y . Скалярные произведения этого элемента самого на себя примут тогда особенно простой вид:

$$\langle\, z\,,\, z\,\rangle_{X\otimes Y} = \langle\, x_1\,,\, x_1\,\rangle_X \cdot \langle\, y_1\,,\, y_1\,\rangle_Y + \langle\, x_2\,,\, x_2\,\rangle_X \cdot \langle\, y_2\,,\, y_2\,\rangle_Y + \ldots + \langle\, x_n\,,\, x_n\,\rangle_X \cdot \langle\, y_n\,,\, y_n\,\rangle_Y \ , \qquad (17)$$

$$(\, z\,,\, z\,)_{X\otimes Y} = (\, x_1\,,\, x_1\,)_X \cdot \langle\, y_1\,,\, y_1\,\rangle_Y + (\, x_2\,,\, x_2\,)_X \cdot \langle\, y_2\,,\, y_2\,\rangle_Y + \ldots + (\, x_n\,,\, x_n\,)_X \cdot \langle\, y_n\,,\, y_n\,\rangle_Y \ . \qquad (18)$$

Удобный необходимый и достаточный признак эквивалентности скалярных произведений $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{X\otimes Y}$ и $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{X\otimes Y}$ состоит в следующем: существует такое $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, что для любого $z \in X \otimes Y$ выполняются условия:

$$\varepsilon \cdot (\, z\,,\, z\,)_{X\otimes Y} < \langle\, z\,,\, z\,\rangle_{X\otimes Y} \ , \qquad \varepsilon \cdot \langle\, z\,,\, z\,\rangle_{X\otimes Y} < (\, z\,,\, z\,)_{X\otimes Y} \ .$$

Но если такое ε существует для скалярных произведений $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_X$ и $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_X$, то согласно формулам (17) и (18), оно же годится и для скалярных произведений $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{X\otimes Y}$ и $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{X\otimes Y}$.

Таким образом, все скалярные произведения в $X \otimes Y$ эквивалентны. Пополняя $X \otimes Y$ относительно топологии, задаваемой этими скалярными произведениями, приходим к пространству гильбертова типа.

12. Топология пространства состояний квантованного электромагнитного поля. Как мы видели, у квантованного электромагнитного поля пространство состояний $\mathcal{H}$ распадается в ортогональную сумму подпространств с определённым числом частиц:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \dot{+} \mathcal{H}_1 \dot{+} \mathcal{H}_2 \dot{+} \ldots \qquad (19)$$

Подпространство $\mathcal{H}_0$ одномерно. Поэтому вопрос о его топологии не встаёт.

Подпространство $\mathcal{H}_1$, как было показано в пункте 10, фактически отождествляется с фазовым пространством классического поля Z . Оно является пространством гильбертова типа. Тем самым вопрос о его топологии также решён.

Рассмотрим теперь тензорное произведение пространства Z на себя: $Z \otimes Z$. В нём естественным образом определяется действие группы перестановок из двух элементов. Простейшие элементы преобразуются под действием этой группы как $\underline{a} \otimes \underline{b} \to \underline{b} \otimes \underline{a}$, а на остальные элементы это действие продолжается по линейности.

Оставим среди скалярных произведений в пространстве $Z \otimes Z$ только инвариантные по отношению к действию указанной группы. На практике удобно просто ограничиться произведениями, для которых в правой части формулы (16) стоит произведение одинаковых скалярных произведений.

Тогда группа перестановок действует унитарно[6] в $Z \otimes Z$. И $Z \otimes Z$ распадается в ортогональную сумму двух инвариантных подпространств: симметрического и антисимметрического.

Каждое из этих двух подпространств наследует топологию из $Z \otimes Z$.

Легко видеть, что двухчастичное квантовое пространство $\mathcal{H}_2$ естественно отождествляется с симметрическим подпространством в $Z \otimes Z$ и тем самым наделяется соответствующей топологией.

И так далее. n -частичное подпространство $\mathcal{H}_n$ отождествляется с полностью симметрическим подпространством n -ой тензорной степени Z . И наследует оттуда топологию.

Таким образом, каждое из подпространств в ортогональной сумме (19) является пространством гильбертова типа. С практической точки зрения это очень удобно, поскольку для практических приложений гораздо проще определять описанные пространства с помощью базисов (а не как факторпространства свободных модулей).

Рассмотрим теперь пространство $\mathcal{H}$ в целом. На основе топологий, введённых в его подпространствах, можно вводить разные топологии во всём пространстве. Например, сходимость направленности к нулю можно понимать как независимое стремление к нулю всех проекций этой направленности. Такая топология представляется в данном случае самой естественной.

[6]Под унитарным преобразованием пространства гильбертова типа мы понимаем автоморфизм этого пространства, т. е. взаимно-однозначное отображение на себя, сохраняющее линейную структуру и каждое из скалярных произведений.

Можно же это требование усилить и потребовать дополнительно, например, чтобы начиная с некоторого момента у направленности лишь конечное число проекций отличалось от нуля.

Таким образом, в $\mathcal{H}$ существует много естественных топологий. При этом само пространство $\mathcal{H}$ пространством гильбертова типа не является.

В связи с этим хотелось бы обратить здесь внимание на следующее обстоятельство. В работе Гупты [14] предлагалось квантовать электромагнитное поле в обычном гильбертовом пространстве с положительно-определённой метрикой. Это действительно можно сделать, рассматривая квантования, инвариантные по отношению к более узкой группе, чем группа Пуанкаре (а именно, по отношению к подгруппе группы Пуанкаре, оставляющей инвариантным направление оси времени). Подпространства с фиксированным числом частиц при этом оказываются фактически совпадающими с построенными выше. Но общее пространство $\mathcal{H}$ наделяется при этом топологией, которая не является релятивистски-инвариантной. При этом оказывается, что некоторые состояния поля при квантовании в одной системе отсчёта гильбертову пространству принадлежат, а в другой нет. Таким образом, старый формализм Гупты релятивистски-инвариантным не является, даже неявно.

В своих более поздних работах Гупта пытался отказаться от насильственного введения знакоопределённой метрики. Однако, его последняя публикация на эту тему [22] ясно показала, что никакой явно релятивистски-инвариантной конструкции квантованного электромагнитного поля у него всё равно нет (не говоря уже о проблемах с функциональным анализом).

13. О происхождении антиунитарных преобразований. В соответствии с введённой процедурой квантования, линейные преобразования наблюдаемых классического поля, сохраняющие скобки Пуассона и подпространства Cr и De, порождают унитарные преобразования состояний квантованного поля. Между тем известно, что в квантовой теории важную роль играют также антиунитарные преобразования симметрии. Рассмотрим их происхождение на примере операции обращения времени — T.

Предположим, что лагранжиан классического поля T-инвариантен (примерами могут служить и скалярное поле и электромагнитное). Тогда действие оказывается тоже T-инвариантным. Тем самым, полевые функции, удовлетворяющие принципу стационарного действия, переходят при отражении времени в функции, также удовлетворяющие принципу стационарного действия.

Таким образом, с точки зрения инвариантного гамильтонова формализма, операция обращения времени — это взаимно-однозначное отображение инвариантного фазового пространства Z на себя. Как при этом отображении ведёт себя симплектическая структура? Из вариационного определения симплектической структуры очевидно, что она при этом меняет знак. Такие преобразования, меняющие знак симплектической структуры, естественно называть *антисимплектическими.*

Рассмотрим теперь сопряжённое действие операции обращения времени на элементы сопряжённого пространства $Z^*_{\mathbb{C}}$:

$$a \xrightarrow{T} a_T \ , \qquad a, a_T \in Z^*_{\mathbb{C}} \ .$$

Скобка Пуассона под действием этого преобразования меняет знак:

$$\{ a_T \, , \, b_T \} = -\{ a \, , \, b \} \ .$$

Таким образом, операция обращения времени порождает автоморфизм алгебры Ли $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$.

В соответствии с процедурой квантования, изложенной в данной статье, возникает желание построить соответствующий автоморфизм алгебры операторов $\mathcal{O}$ для квантованного поля. Этого, однако, сделать нельзя. Дело в том, что при построении алгебры операторов $\mathcal{O}$ у множества $\mathcal{C} \oplus Z^*_{\mathbb{C}}$ используется не только структура алгебры Ли, но и специальное соответствие между подпространством $\mathcal{C}$ и множеством скаляров $\mathbb{C}$ (соотношение $\hat{1} = ()^\frown$). Это означает, что для перенесения операции обращения времени на квантовый случай требуются дополнительные соглашения, кроме уже введённой операции квантования.

Условимся, что слова (т. е. элементы полугруппы $\mathcal{W}$) при обращении времени преобразуются по следующей формуле:

$$\hat{a}\,\hat{b} \ldots \hat{c} \xrightarrow{T} \hat{c}_T \ldots \hat{b}_T \, \hat{a}_T \ , \qquad \hat{a}, \hat{b}, \ldots, \hat{c}, \hat{a}_T, \hat{b}_T, \ldots, \hat{c}_T \in \mathcal{A} \ ,$$

т. е. происходит замена каждой буквы на соответствующую, и буквы после этого записываются в обратном порядке. При этом очевидно, что отражение времени на произведение двух слов действует следующим образом:

$$\hat{p}\,\hat{q} \xrightarrow{T} \hat{q}_T \, \hat{p}_T \ , \qquad \hat{p}, \hat{q}, \hat{p}_T, \hat{q}_T \in \mathcal{W} \ .$$

Взаимно-однозначное отображение полугруппы на себя, обладающее таким свойством можно назвать *антиавтоморфизмом.*

Построенный антиавтоморфизм полугруппы слов $\mathcal{W}$ по линейности продолжается до антиавтоморфизма алгебры фраз $\mathcal{P}$. Далее, легко проверить, что этот антиавтоморфизм алгебры фраз порождает антиавтоморфизм алгебры операторов $\mathcal{O}$.

Предположим далее, что при обращении времени рождающее подпространство Cr и уничтожающее De переходят друг в друга. Это условие обычно выполняется потому, что эти подпространства являются отрицательно- и положительно-частотными, соответственно. Левый идеал, натянутый на $De^\frown$, при обращении времени переходит в правый идеал, натянутый на $Cr^\frown$. Получающийся в результате факторизации левый модуль переходит в соответствующий правый модуль.

Таким образом, операция обращения времени задаёт взаимно-однозначное линейное соответствие кет- и бра-векторов[7].

Скалярное произведение, как нетрудно видеть, при обращении времени сохраняется:

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \langle\, y_T \,|\, x_T \,\rangle \ . \tag{20}$$

Поскольку между кет- и бра-векторами имеется взаимно-однозначное антилинейное соответствие, то можно проводить все рассуждения в рамках одного пространства, например, пространства кет-векторов. Тогда операция обращения времени может рассматриваться как взаимно-однозначное антилинейное преобразование этого пространства. Соотношение (20) показывает, что при указанном преобразовании скалярное произведение изменяется на комплексно-сопряжённое. Преобразование, обладающее такими свойствами, называют *антиунитарным.*

В заключение хочу поблагодарить В. М. Шабаева, В. С. Буслаева, Л. Д. Фаддеева, Т. А. Болохова, В. А. Франке, В. Д. Ляховского, Л. В. Прохорова, В. В. Верещагина и Ю. М. Письмака за плодотворные дискуссии.

Список литературы

[1] R. E. Peierls “The commutation laws of relativistic field theory”, Proc. Roy. Soc. (London) **A214**, 143-157 (1952).

[2] Б. С. Девитт *„Динамическая теория групп и полей“*, М.: Наука (1987). [B. S. DeWitt *“Dynamical theory of groups and fields”*, New York: Gordon and breach (1965).]

[3] V. A. Fock “Konfigurationsraum und zweite Quantelung”, Z. Phys. **75**, 622-647 (1932). [„Конфигурационное пространство и вторичное квантование“, в сб. [4], стр. 25-51.]

[4] В. А. Фок *„Работы по квантовой теории поля“*, Л.: изд-во ЛГУ (1957).

[5] Дж. Макки *„Представления групп в гильбертовом пространстве“*, приложение в кн. [6]. [G. W. Mackey “Group representations in Hilbert space”, appendix in the book [6].]

[6] И. Сигал *„Математические проблемы релятивистской физики“*, М.: Мир (1968). [I. E. Segal *“Mathematical problems of relativistic physics”*, Providence, Rhode island: AMS (1963).]

[7] S. Weinberg *“The quantum theory of fields”*, v. 1: *“Foundations”*, Cambridge univ. press (1996).

[8] А. С. Шварц *„Математические основы квантовой теории поля“*, М.: Атомиздат (1975).

[9] А. А. Кириллов „Геометрическое квантование“, Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фунд. напр. **4**, 141-178 (1985).

[10] Ф. А. Березин „Континуальный интеграл по траекториям в фазовом пространстве“, УФН **132**(3), 497-548 (1980).

[7] Швингер предлагал [23] интерпретировать кет-векторы как символы, обозначающие создание системы в прошлом; бра-векторы как символы, обозначающие уничтожение системы в будущем; а операторы как действие приборов в ходе эксперимента. Такая интерпретация оказывается здесь весьма естественной.

[11] K. Bleuler "Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen", Helv. Phys. Acta **23**(5), 567-586 (1950).

[12] S. T. Ma "Relativistic formulation of the quantum theory of radiation", Phys. Rev. **75**, 535-535 (1949).

[13] F. J. Belinfante "On the part played by scalar and longitudinal photons in ordinary electromagnetic fields", Phys. Rev. **76**(2), 226-233 (1949).

[14] S. N. Gupta "Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics", Proc. Phys. Soc. A **63**(7), 681-691 (1950).

[15] В. Е. Тирринг *„Принципы квантовой электродинамики"*, М.: Высшая школа (1964). [W. E. Thirring *"Principles of quantum electrodynamics"*, New York: Academic press (1958).]

[16] Х. Умэдзава *„Квантовая теория поля"*, М.: ИЛ (1958). [H. Umezawa *"Quantum field theory"*, Amsterdam: North-Holland publ. (1956).]

[17] П. А. М. Дирак *„Принципы квантовой механики"*, М.: Наука (1979). [P. A. M. Dirac *"The principles of quantum mechanics"*, Oxford: Clarendon press (1958).]

[18] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков *„Введение в теорию квантованных полей"*, М.: Наука (1984).

[19] Л. В. Прохоров „Квантование электромагнитного поля", УФН **154**(2), 299-320 (1988).

[20] N. Bohr, L. Rosenfeld "Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrössen", Kgl. Danske Vidensk. Selskab., Math.-Fys. Medd. **12**(8), 3-65 (1933). [„К вопросу об измеримости электромагнитного поля", в сб.: [21], т. 2, стр. 120-162.]

[21] Н. Бор *„Избранные научные труды"*, т. 2, М.: Наука (1971).

[22] S. N. Gupta "Lorentz covariance of quantum electrodynamics with the indefinite metric", Prog. Theor. Phys. **21**(4), 581-584 (1959).

[23] Ю. Швингер *„Квантовая кинематика и динамика"*, М.: Наука (1992). [J. Schwinger *"Quantum kinematics and dynamics"*, New York: W. A. Benjamin, Inc. (1970).]